Chapitre 1 - Révisions d'analyse B : polynômes

I. Généralités, espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$

Définition I.1
On appelle **polynôme** toute fonction de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Les nombres a_k sont appelés les coefficients du polynôme P.
On dit que deux polynômes sont égaux lorsque leurs coefficients sont égaux. Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes.

Remarque
La notation de l'ancien programme est $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où X est une indéterminée. Cette notation est bien meilleure d'un point de vue théorique... Nous l'utiliserons de temps en temps et vous la trouverez dans les annales...

Définition I.2
Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme non nul. Le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$ est appelé **degré** de P. On le note $deg(P)$. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, avec $a_n \neq 0$, alors P est de degré n, le coefficient a_n s'appelle **coefficient dominant** de P et $a_n x^n$ est le monôme de plus haut degré de P.
Si le coefficient dominant a_n est égal à 1, on dit que P est **unitaire**.
Par convention, si $P = 0$, on pose $deg(P) = -\infty$.

Définition I.3
Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n et du polynôme nul est noté $\mathbb{R}_n[x]$.

La somme, le produit de deux polynômes est encore un polynôme.

Proposition I.1
1. $\mathbb{R}[x]$ est un sous-espace vectoriel de $(App(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$. Il est de dimension infinie.
2. $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$, il a pour base canonique $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$.

   Autrement dit, si l'on note
   $$\forall k \in [[0, n]], \quad f_k : x \mapsto x^k$$
   alors $(f_0, f_1, \cdots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Définition I.4
Polynôme pair, polynôme impair
On dit qu'un polynôme P est pair si c'est une fonction paire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(-x) = P(x)$.
De même P est impair si $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(-x) = P(x)$.

Remarque
Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
Le polynôme P est pair si et seulement si pour tout i, $a_{2i+1} = 0$, autrement dit si P est somme de monômes de degrés pairs.
Le polynôme P est impair si et seulement si pour tout i, $a_{2i} = 0$, autrement dit si P est somme de monômes de degrés impairs.

Proposition I.2
Propriétés du degré

1. $\deg(P.Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
2. $\deg(P + Q) \leq Max(\deg(P), \deg(Q))$ (ne pas en abuser).

   Si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \deg(Q)$.

Proposition I.3
Soit P et Q deux polynômes. Alors $PQ = 0$ si et seulement si $P = 0$ ou $Q = 0$.

II. Division euclidienne

Théorème II.1
Soit A et B deux polynômes, avec B non nul. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[x]^2$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad deg(R) < deg(B)$$

On dit alors que l'on a effectué la division euclidienne de A par B. Q est le quotient et R est le reste de la division.

Définition II.1
Soit A et B deux polynômes, avec B non nul. On dit que B divise A, ou que A est un multiple de B, lorsqu'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$.

Remarque
B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Définition II.2
Soit A un polynôme non nul et non constant. A est dit **irréductible** lorsque les seuls polynômes qui divisent A sont les polynômes constants et les polynômes de la forme $B = \lambda A$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Remarque
Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 avec $\Delta < 0$ (hors-programme).

III. Dérivation dans $\mathbb{R}[x]$. Formule de Taylor dans $\mathbb{R}[x]$

La dérivation $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $P \mapsto P'$ est un endomorphisme de l'ev $\mathbb{R}[x]$.

Théorème III.1
Formule de Leibniz
Soit P et Q deux polynômes. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} \times Q^{(n-k)}$$

Proposition III.1

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$. Notons $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^k$.
   - Premier cas : si $j > k$ alors $P^{(j)} = 0$.
   - Deuxième cas : si $j \leq k$ alors
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P^{(j)}(x) = \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j}$$
2. Si $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ où $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ alors par linéarité :
   - Premier cas : si $j > n$ alors $Q^{(j)} = 0$.
   - Deuxième cas : si $j \leq n$ alors $Q^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k . \frac{k!}{(k-j)!} . x^{k-j}$.

Théorème III.2
Formule de Taylor pour les polynômes
Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ et si a est un réel fixé, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Remarque
Cette formule donne la décomposition du polynôme P dans la base $(1, (X-a), (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

IV. Racines

Définition IV.1
Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition IV.1
Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$.
α est racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha).Q(x)$

Proposition IV.2
Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Si α_1, ..., α_n sont des racines de P deux à deux distinctes alors il existe un polynôme Q tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n).Q(x)$.

Théorème IV.1
Soit P un polynôme non nul de degré n. Alors P admet au plus n racines distinctes.

Théorème IV.2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ admet $n + 1$ racines distinctes alors $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$. Si P et Q coincident en $n + 1$ valeurs distinctes alors $P = Q$.
3. Si P est un polynôme qui admet une infinité de racines distinctes, alors $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$.
4. Si deux polynômes P et Q coincident sur une infinité de valeurs, alors $P = Q$.
   Autrement dit, s'il existe un ensemble A de cardinal infini tel que pour tout $a \in A$, $P(a) = Q(a)$, alors $P = Q$.

Définition IV.2
Racines multiples
Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine de P d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha)^p Q(x)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

Remarque
Si $p = 1$, on dit que α est une racine simple de P. Si $p = 2$, il s'agit d'une racine double. Si $p \geq 2$, on dit que α est une racine multiple de P.

Théorème IV.3
Caractérisation des racines d'ordre k
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n, soit $k \in [[1, n]]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
α est une racine d'ordre k de P si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et} \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{array} \right.$$

Exercice 1
On souhaite factoriser le polynôme $P = X^4 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que P admet deux racines évidentes.
2. En déduire la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles.