Chapitre 1 - Révisions d'analyse C : théorèmes classiques

I. Limites

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Théorème I.1
Théorème d'encadrement ou des gendarmes
Soit f, g, h trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, telles que au voisinage de x_0,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x\to x_0} h(x) = l$ alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.

Théorème I.2
Théorème d'encadrement bis - à bien maîtriser
Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \mathbb{R}$. Si pour x voisin de x_0,

$$|f(x) - l| \leq g(x) \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Théorème I.3
Passage à la limite dans une inégalité large
Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si au voisinage de x_0,

$$f(x) \leq g(x), \text{ si } \lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$$

alors $l \leq l'$.

Théorème I.4
Théorème de limite monotone
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie et monotone sur un intervalle $I =]a;b[$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. **1er cas : si f est croissante sur I alors**
   - f admet en tout $x_0 \in]a,b[$ une limite à droite finie et une limite à gauche finie et
   $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$
   - si f est majorée alors f admet une limite finie lorsque $x \to b^-$.
   Si f n'est pas majorée alors $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.
   - si f est minorée sur $]a,b[$ alors f admet une limite finie quand $x \to a^+$.
   Si f n'est pas minorée alors $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

2ème cas : si f est décroissante sur I : on adapte !!!

II. Continuité

Théorème II.1
Théorème des valeurs intermédiaires
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.
Si

la fonction f est continue sur l'intervalle $[a;b]$,

alors

pour tout réel k intermédiaire $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Théorème II.2
Image d'un intervalle
Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème II.3
Image d'un segment par une fonction continue
Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Alors $f([a,b]) = [m,M]$ où $m = min_{[a,b]}(f)$ et $M = Max_{[a,b]}(f)$.

Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ admet un minimum m et un maximum M.

Remarque
Utile en calcul intégral.

Théorème II.4
Théorème de la bijection
Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa bijection réciproque f^{-1} est elle-même continue et a le même sens de variation que f.

Remarque
Un des théorèmes les plus utiles !!

III. Dérivation

Définition III.1
Version 1
f est **dérivable en** x_0 si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ possède une limite finie quand x tend vers x_0.
Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé de** f **en** x_0 et

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Version 2
f est **dérivable en** x_0 si la fonction $h \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ possède une limite finie quand h tend vers 0.
Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé de** f **en** x_0 et

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Théorème III.1
Dérivée de la bijection réciproque en un point
Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un intervalle J, et $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

Théorème III.2
Dérivée de la bijection réciproque sur un intervalle
Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque. Si f est dérivable sur I et si **f' ne s'annule pas sur I** alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Théorème III.3
Nombre dérivé en un extrema
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et x_0 un point de I qui n'est pas une borne de I.
Si f possède un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème III.4
Théorème de Rolle
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si :

1. f est continue sur $[a,b]$,
2. f est dérivable sur $]a,b[$,
3. $f(a) = f(b)$

alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème III.5
Egalité des accroissements finis
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si :

1. f est continue sur $[a,b]$,
2. f est dérivable sur $]a,b[$,

alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Théorème III.6
Inégalité des accroissements finis
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si :

1. f est dérivable sur I,
2. il existe un réel $k \geq 0$ fixé tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq k$,

alors pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$|f(b)-f(a)| \leq k|b-a|$$

Autre version (plus au programme) :
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si :

1. f est continue sur $[a,b]$,
2. f est dérivable sur $]a,b[$,
3. il existe $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $m \leq f'(x) \leq M$,

alors

$$m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$$

Théorème III.7
Théorème de prolongement de la dérivée (nouveau programme !!)
Soit I un intervalle et $a \in I$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$, continue en a et si $\lim_{x\to a} f'(x) = l$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = l$.

IV. Convexité

Définition IV.1
Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est **convexe** sur I si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad \forall t \in [0,1]^2,$$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

On dit que f est **concave** sur I si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad ,\forall t \in [0,1]^2,$$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Remarque
Si f est convexe, alors f est en-dessous de ses cordes.
Si f est concave, alors f est au-dessus de ses cordes.

Remarque
f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Théorème IV.1
Inégalité de Jensen - ou de convexité généralisée
Si f est une fonction convexe sur un intervalle I, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1 \cdots, x_n) \in I^n$, pour tout $(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$,

$$f(\sum_{i=1}^n t_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

Théorème IV.2
Cas où f est de classe $\mathcal{C}^2$: f est convexe sur I ssi $f'' \geq 0$ sur I.
f est concave sur I ssi $f'' \leq 0$ sur I.

Proposition IV.1
Si f est convexe alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
Si f est concave alors $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de ses tangentes.

Exercice 1
Inégalités classiques de convexité :
Démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.
2. Pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$. *Variante* : pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.
3. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
4. Pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, $\ln(\frac{x+y}{2}) \geq \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y)$.
5. A l'aide de la concavité de la fonction ln, montrer que
$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in]0; +\infty[^n, \quad \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}$$
Cette inégalité est appelée *inégalité arithmético-géométrique.*

Définition IV.2
Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ et $a \in I$. On dit que $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si f'' s'annule et change de signe en a.

Remarque
En un point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.

V. Equivalents classiques

Au voisinage de 0,

$\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$	$e^x - 1 \sim_{x\to 0} x$	$\sin(x) \sim_{x\to 0} x$
$1 - \cos(x) \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}$	$tan(x) \sim_{x\to 0} x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim_{x\to 0} \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

On a également $\boxed{\ln(x) \sim_{x\to 1} x - 1}$

Soit P un polynôme, $P(x) = a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_q x^q$ où $p < q$, $a_p \neq 0$ et $a_q \neq 0$.
Alors : $\boxed{P(x) \sim_{x\to+\infty} a_q x^q,\ P(x) \sim_{x\to 0} a_p x^p}$

VI. Négligeabilité classique

$\boxed{\text{En } +\infty}$: pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$\ln(x) = o_{x\to+\infty}(x)$	$(\lvert\ln(x)\rvert)^\beta = o_{x\to+\infty}(x^\alpha)$
$x = o_{x\to+\infty}(e^x)$	$x^\beta = o_{x\to+\infty}(e^{\alpha x})$

Si $\alpha > \beta > 0$, $\boxed{x^\beta = o_{x\to+\infty}(x^\alpha)}$

$\boxed{\text{En } 0}$: pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$\ln(x) = o_{x\to 0}(\frac{1}{x})$	$\lvert\ln(x)\rvert^\beta = o_{x\to 0}(\frac{1}{x^\alpha})$

Si $\alpha > \beta > 0$, $\boxed{x^\alpha = o_{x\to 0}(x^\beta)}$

VII. Suites réelles

Voir le cours de 1ère année.

VII.1) Suites usuelles

Suites arithmétiques, géométriques, AG (arithmético-géométriques), SRL2 (récurrentes linéaires d'ordre 2).

VII.2) Limites

Définition avec les epsilon. Théorèmes classiques : encadrement, entrainement, passage à la limite, composition...

Théorème VII.1
Suites extraites des termes pairs et impairs (au programme).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite l si et seulement si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont toutes deux pour limite l.

VII.3) Equivalents, petit "o"

Définitions et formules à connaître dans le cadre des suites...

VII.4) Exercices classiques

Cf cours 1ère année : suites implicites, suites récurrentes, du type $u_{n+1} = f(u_n)$ etc...