Exercices - Rappels d'analyse

Exercice 1
Sur la fonction Arctan : quelques classiques

1. Justifier que la fonction arctangente admet un point d'inflexion, préciser ses coordonnées.
2. Déterminer un équivalent de $\text{Arctan}(x)$ au voisinage de 0.
3. Que vaut $\tan(\text{Arctan}(x))$ pour tout réel x ?
   En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\text{Arctan}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 2
On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\exp(2x^2)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3
Calcul intégral
Justifier l'existence et donner la valeur des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} a.\ \int_0^1 \dfrac{t}{t^2+1}dt & b.\ \int_0^1 \dfrac{1}{t^2+1}dt & c.\ \int_0^1 \dfrac{t^2}{t^2+1}dt \\ d.\ \int_0^1 t\sqrt{t^2+1}dt & e.\ \int_4^{e+3} \dfrac{1}{(3-x)^n}dx\ (n \in \mathbb{N}) & f.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx \\ g.\ \int_1^e \dfrac{\ln^n(x)}{x}dx\ \ (n \in \mathbb{N}) & h.\ \int_{e^{-1}}^{e^{-2}} \dfrac{1}{t\ln(t)}dt & i.\ \int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{1+3x^2}dx \end{array}$$

Exercice 4
Intégrations par parties
Justifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)dx \qquad J = \int_1^e t\ln^2(t)dt \qquad K = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\,dx$$

Exercice 5
Calcul de limite

1. Montrer que : $\forall t \in]0,+\infty[,\ \dfrac{1}{t+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \dfrac{1}{t}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt\right)$

Exercice 6
Fonctions qui dépendent d'une intégrale

1. **Fonction des bornes d'une intégrale**
   On note $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_x^{2x} e^{t^2}dt$.
   (a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.
   (b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}(F(x)) = +\infty$.
   (c) Etudier la parité de F. En déduire $\lim_{x\to-\infty}(F(x))$.
2. **Intégrale à paramètre**
   On note $\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad F(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{xt^2}dt$
   (a) Montrer que F est définie et croissante sur $[0,+\infty[$.
   (b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}(F(x)) = +\infty$.

Exercice 7
Le lemme de Lebesgue
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$.

1. Montrer que $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin(\lambda x)}{x}\right) = 0$
2. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)\cos(xt)dt\right) = 0$.

Exercice 8
Fonction dépendant d'une intégrale
Soit $f : x \to f(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$.
On souhaite montrer que f est une application constante.

1. Justifier que f est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2. **Méthode 1 :** Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer f'.
   En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout réel x strictement positif.
3. **Méthode 2 :** A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que f est constante égale à 0.
4. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_3^{\frac{1}{3}} \dfrac{\ln(t)}{t^2+1}dt$

Exercice 9
Petit exercice - produit de convolution : cf cours de probas plus tard !

Soit f et g continues sur $\mathbb{R}$. On définit l'application $f\star g$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f\star g(x) = \int_0^x f(t).g(x-t)dt$$

1. *Etude d'un cas particulier :* déterminer $f\star g$ lorsque $f = g = \exp$.
2. Prouver que $f\star g = g\star f$.
3. Soit f et g paires. Déterminer la parité de $f\star g$.

Exercice 10
On note f la fonction suivante $f : x \to \int_x^{2x} \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'.
3. Etudier les variations de f.
4. (a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq f(x) \leq \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$.
   (b) En déduire les limites de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, de 0 à droite, de 0 à gauche.
   (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 11
Sommes de Riemann
Pour chacune des suites suivantes, démontrer sa convergence et calculer sa limite:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{kn+n^2}}, \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n+3k}$$

Exercice 12
Des intégrales classiques
On note: $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Calculer $I_{p,0}$ pour tout entier naturel p.
2. Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad I_{p,q} = I_{q,p}$
3. Exprimer $I_{p+1,q}$ en fonction de $I_{p,q+1}$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
4. Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 13
Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$I = \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \quad \text{en posant} \quad u = 1+\sqrt{x}$$
$$J = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}dt \quad \text{en posant} \quad t = \tan(x)$$
$$K = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \quad \text{en posant} \quad t = \sin(x)$$

Exercice 14
Suites et séries
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,1[$, et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$. .
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^2 et sa somme éventuelle.
3. (a) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$?
   (b) En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 15
Développements limités *(NEW)*
Déterminer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de e;
2. $g(x) = \cos(x).e^{-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0;
3. $h(x) = \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0

Exercice 16
Formules de Taylor et séries
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$.

1. Justifier que la fonction $t \to \ln(1-t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$ et calculer ses dérivées successives.
2. En déduire que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left|\ln(1-x) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{(2x)^{n+1}}{n+1}$$
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$. Ecrire le résultat sous la forme d'une série.

Exercice 17
Utilisation des DL pour calculer des limites
Déterminer les limites suivantes.

$a.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$ $\quad b.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$ $\quad c.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)$
$d.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1-x)}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$

Exercice 18
Inégalité de Taylor-Lagrange

1. Montrer que, pour tout réel x, $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}$
2. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $\left|\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}\right| \leq \frac{5}{81}x^3$

Exercice 19
Suite, série *(NEW)*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (1 + \frac{1}{n^\alpha})^n$.

1. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la nature de la série $\sum(u_n - 1)$.

Exercice 20
Formule du binôme négatif
Soit r un entier naturel et x un réel tel que $x \in]0,1[$.

1. (a) Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.
   (b) Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}\,x^n$.
   (c) En déduire que la série de terme général $\binom{n}{r}\,x^n$ est convergente.
2. Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$.
   (a) Donner la valeur de S_0.
   (b) Etablir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x)\,S_{r+1} = x\,S_r$.
   (c) En déduire que : $\forall x \in]0,1[$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

Exercice 21
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$.
2. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 22
Autour de la série harmonique alternée
On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

On considère, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les intégrales $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^2)^2}dx$.

1. Justifier que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(J_n) = 0$.
   (b) En intégrant par parties, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1}J_{n+2}$$
   (c) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, préciser sa limite, puis un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1} = \dfrac{1}{1+x} + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{1+x}$.
   (b) En déduire que, pour $n \geq 1$, $S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.
   (c) A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$, justifier que, pour tout $n \geq 1$,
   $$S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1}2I_{2n+1}$$
   (d) En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et calculer la somme suivante $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
   (e) Justifier que :
   $$S_n - \ln(2) \sim n \to +\infty \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$