Chapitre 1 - Révisions d'analyse D : Dérivées n-ièmes

I. Définitions

Définition I.1

1. On dit que f **est de classe $\mathcal{C}^n$ sur** I ($n \in \mathbb{N}^*$) si elle est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
   En particulier, $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I; $\mathcal{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions dérivables sur I dont la dérivée est continue.

2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f possède une dérivée d'ordre n, on dit que f **est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur** I. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Remarque
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^n(I)$.

II. Dérivées de référence

Théorème II.1

1. Les fonctions polynômes, fonctions rationnelles, ln, exp, cos, sin, tan, arctan sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

2. (a) Soit P un polynôme avec $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$. Alors $P^{(n+1)} = 0$, et donc pour tout $k > n$. Alors $P^{(k)} = 0$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $k \in [[0, n]]$ et $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $P(x) = x^n$. Alors
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ où $f(x) = x^\alpha$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors
   $$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$$

4. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k.k!}{x^{k+1}}$$

5. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$.

6. A l'aide du 4) :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}.(k-1)!}{x^k}$$

7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\cos^{(k)}(x) = \cos(x + k.\frac{\pi}{2}) \quad \text{et} \quad \sin^{(k)}(x) = \sin(x + k.\frac{\pi}{2})$$
   ou aussi : pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{cases} \cos^{(2i)}(x) = (-1)^i.\cos(x) \\ \cos^{(2i+1)}(x) = (-1)^{i+1}.\sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin^{(2i)}(x) = (-1)^i.\sin(x) \\ \sin^{(2i+1)}(x) = (-1)^i.\cos(x) \end{cases}$$

III. Formules générales

Théorème III.1
Combinaison linéaire, produit, quotient

1. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I, et $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$.

2. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I, alors leur produit $f \times g$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.
   Formule de Leibniz :
   $$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

3. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I, et si g ne s'annule pas sur I, alors leur quotient $\frac{f}{g}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 e^{-x}$.
Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer sa dérivée n-ième, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème III.2
Composition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications telles que $f(I) \subset J$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I et si g est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur J , alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

Rédaction-type :
Récurrences sur k, avec une hypothèse du type $\mathcal{H}(k)$: "$\forall x \in I$, $f^{(k)}(x) = \cdots$".
Attention : ne pas fixer x avant l'hypothèse de récurrence.