Chapitre 1 - Révisions d'analyse E : intégrales

I. Primitives et intégrales

Théorème I.1
Théorème fondamental d'existence d'une primitive
Toute fonction f continue sur un intervalle I admet une primitive F sur l'intervalle I :
il existe une fonction F dérivable sur I, telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.
G est une primitive de f sur I si et seulement si il existe un réel k tel que $G = F + k$.

L'intégrale d'une fonction continue positive sur $[a, b]$ est égale à l'aire sous la courbe.

Pour justifier l'existence d'une intégrale, on justifie la continuité de f sur le segment d'intégration

Théorème I.2
Lien intégrale-primitive
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit F une primitive de f sur l'intervalle I. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on définit l'intégrale de a à b de f par :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Proposition I.1
Si f est continue sur I et $a \in I$, la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur I.
C'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Technique à bien maîtriser

Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $u : I \to J$ et $v : I \to J$ deux fonctions dérivables sur I.
Notons F une primitive de f sur J.
Soit

$$\begin{aligned} G : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \end{aligned}$$

Alors G est dérivable sur I et $\forall x \in I$,

$$G(x) = ...$$

d'où en dérivant :

$$G'(x) = ...$$

II. Propriétés

Proposition II.1
Linéarité de l'intégrale
Soit $(f, g) \in \mathcal{C}(I)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(a, b) \in I^2$. Alors

$$\int_a^b \lambda f(t) + g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Proposition II.2
Relation de Chasles
Soit f une application continue sur un intervalle I. Pour tout $(a, b, c) \in I^3$,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Proposition II.3
Positivité
Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ et $(a, b) \in I^2$. Si :
(1) **les bornes sont dans le bon sens**, c'est-à-dire $a < b$
(2) f est une fonction positive sur $[a, b]$
alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Proposition II.4
croissance de l'intégrale
Soit f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit $(a, b) \in I^2$. Si :
(1) **les bornes sont dans le bon sens**, c'est-à-dire $a < b$
(2) $f \geq g$, c'est-à-dire que pour tout $t \in I$, $f(t) \geq g(t)$,
alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.

Exercice 1
A l'aide d'un encadrement, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \dfrac{x^n}{x+1} dx = 0$.

Remarque
Cas particulier :
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Elle admet alors un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$, et pour tout $t \in [a, b]$, $m \leq f(t) \leq M$. On a alors

$$m.(b - a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M.(b - a)$$

Proposition II.5
Inégalité triangulaire pour les intégrales
Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ et $(a,b) \in I^2$. Si **les bornes** a **et** b **sont dans le bon sens**, c'est-à-dire si $a \leq b$ alors

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Exercice 2
Soit pour tout $n \geq 2$, $I_n = \displaystyle\int_2^3 \frac{\sin(t)}{t^n}dt$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Proposition II.6
Stricte positivité
Soit $f \in \mathcal{C}(I)$, et $(a,b) \in I^2$. Si :
(1) **les bornes sont dans le bon sens**, c'est-à-dire $a < b$,
(2) la fonction f est **positive**,
(3) la fonction f est **différente de la fonction nulle**,
alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.

Proposition II.7
fonction continue positive d'intégrale nulle
Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ et $(a,b) \in I^2$. Si :
(1) **les bornes sont dans le bon sens**, c'est-à-dire $a < b$,
(2) la fonction f est positive,
(3) $\int_a^b f(t)dt = 0$,
alors f **est la fonction nulle sur** $[a,b]$.

III. Méthodes de calcul

III.1) Primitiver "à vue"

Entrainez-vous !!

III.2) Intégration par parties

Théorème III.1
Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I alors pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Choix judicieux de u **et** v **!!**
Parfois une double IPP

Exercice 3
1. Calculer l'intégrale $\int_0^1 te^t dt$.
2. Calculer $\int_1^e t\ln(t)dt$.
3. Calculer à l'aide de deux intégrations par parties $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+t-1)\sin t\ dt$.

III.3) Changement de variables

Théorème III.2
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I, φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, telle que $\varphi(J) \subset I$. On a alors, pour α et β dans J,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du$$

Remarque
1. La formule de changement de variable peut s'utiliser dans les deux sens (voir les exemples).
2. le programme précise que les changements de variables non affines devront être indiqués. Par conséquent, les seuls changements de variables que vous devez trouver seuls sont du type $u = at + b$ où a et b sont deux constantes... enfin en théorie !!! Dans la pratique **mieux vaut avoir un peu d'intuition !!**

Rédaction-type
Le changement de variables $u = \varphi(t)$ est donné par une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur l'intervalle ...., bijective de ... sur ....., donc autorisé.

Bornes $\begin{cases} t = ... \\ t = ... \end{cases} \to \begin{cases} u = ... \\ u = ... \end{cases}$
$du = \varphi'(t)dt$

Rédaction-type plus rapide pour changement de variables affine
Le changement de variables $u = at + b$ est affine non constant ($a \neq 0$) donc autorisé.

Exercice 4
1. Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$ à l'aide du changement de variables $u = \cos(x)$.
2. Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}dt$ à l'aide du changement de variables $u = 1 + e^t$.
3. Calculer $K = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$ à l'aide du changement de variables $x = \sin(t)$
Gros classique !!

Théorème III.3
Fonctions paires et impaires
Soient $a \geq 0$ et f une fonction continue sur $[-a;a]$.
Si f est paire, $\int_0^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt$ d'où $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
Si f est impaire, $\int_0^a f(t)dt = -\int_{-a}^0 f(t)dt$ d'où $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

Théorème III.4
Fonction périodique
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

IV. Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle **somme de Riemann associée à** f l'une des deux sommes suivantes :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \quad \text{ou} \quad T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

Graphiquement, on peut constater que les sommes S_n et T_n sont des valeurs approchées de $\int_a^b f(t)dt$.

L'approximation de $\int_a^b f(t)dt$ par S_n s'appelle la **méthode des rectangles à gauche** et l'approximation de $\int_a^b f(t)dt$ par T_n s'appelle la **méthode des rectangles à droite**.

Théorème IV.1
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} T_n = \int_a^b f(t)dt$.

Remarque
La méthode des rectangles (à gauche ou à droite) fournit donc des valeurs approchées de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$. Cf TD Scilab.

Exercice 5
Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de $u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.