# Chapitre 1 - Révisions d'analyse F : séries

## I. Vocabulaire et généralités

**Définition I.1**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Etudier la série de terme général $u_k$, où $k \in \mathbb{N}$ (notation $\sum_{k\geq 0} u_k$), c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles, où $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on dit que la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge et on note
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$
Ce réel est la somme de la série convergente.
Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge : la série diverge.
Même définition si $k \geq n_0$.

**Remarque**
La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, ni de son indice initial $n_0$ : la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge ssi la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge.

**Définition I.2**
**Reste d'une série convergente**
Si la série de terme général $u_k$ converge, on peut s'intéresser à la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes partiels, où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le reste partiel d'ordre $n$ de la série. On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

**Théorème I.1**
1. **Si** la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge **alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors la série de terme général $u_k$ diverge (série grossièrement divergente).

Evident car $S_n - S_{n-1} = u_n$.

**Séries du type télescopique :**
Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = v_{k+1} - v_k$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = v_{n+1} - v_0 \quad \text{par télescopage}$$
Donc la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge si et seulement si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Si c'est le cas, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0$.



**Exercice 1**
**Exercice de cours**
Montrer que la série de t.g. $\frac{1}{k(k+1)}$ converge ($k \geq 1$) et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

**Théorème I.2**
**Combinaison linéaire de séries convergentes**
Soit deux séries convergentes de termes généraux respectifs $u_n$ et $v_n$, et $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel donné.
Alors la série de terme général $\alpha u_n + v_n$ converge et
$$\sum_{k=0}^{+\infty} [\alpha u_k + v_k] = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

**Théorème I.3**
Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \leq v_k$ et si les deux séries $\sum_{k\geq 0} u_k$ et $\sum_{k\geq 0} v_k$ sont convergentes, alors
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

## II. Séries de référence

**Théorème II.1**
**Séries de Riemann**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ un réel fixé. $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
En particulier la série harmonique $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge.

**Remarque**
**Exercice très classique : cf dernière partie**
$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_{n\to+\infty} \ln(n)}$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)) = \gamma}$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ est la constante d'Euler.

**Remarque**
**Culture générale mathématique**
La fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$ est définie sur $]1; +\infty[$. Elle s'appelle la fonction zeta, notée $\zeta$.
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$
Ce résultat est le but de nombre d'exercices.

**Théorème II.2**
**Séries géométriques et géométriques dérivées**
Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. La série géométrique $\sum_{k\geq 0} x^k$ converge si et seulement si $|x| < 1$.
   Dans ce cas, $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}}$
2. La série géométrique dérivée (première) $\sum_{k\geq 1} kx^{k-1}$ converge si et seulement si $|x| < 1$.
   Dans ce cas, $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$
3. La série géométrique dérivée (seconde) $\sum_{k\geq 2} k(k-1)x^{k-2}$ converge si et seulement si $|x| < 1$.
   Dans ce cas, $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}}$

**Remarque**
**Variantes**
Si $|x| < 1$ alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k.x^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} k^2.x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

**Remarque**
**Généralisation (HP)**
La série $\sum_{k\geq r} k(k-1)\cdots(k-r+1).x^{k-r}$ converge ssi $|x| < 1$ (série géométrique dérivée $r$-ième) et dans ce cas

$$\sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1).x^{k-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$$

**Formule du binôme négatif (HP)**
La série $\sum_{k\geq r} \binom{k}{r}.x^{k-r}$ converge ssi $|x| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r}.x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

Ces deux formules sont équivalentes, et assez souvent redémontrées en concours.

**Théorème II.3**
**Série exponentielle**

Pour tout réel $x$, la série de terme général $\dfrac{x^k}{k!}$ converge et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x}$$



# III. Critères de convergence des séries à termes positifs

**Proposition III.1**
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k$ positif. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante.

**Théorème III.1**
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. **Critère d'équivalence** (à privilégier !!)
   Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k$ positif et si $u_k \sim_{+\infty} v_k$, alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.
2. **Critère de comparaison** Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geq 0$, $v_k \geq 0$ et $u_k \leq v_k$ alors :
   (a) Si la série $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge, alors la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge et dans ce cas $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.
   (b) Si la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ diverge, alors la série $\sum_{k\geq 0} v_k$ diverge.
3. **Critère de négligeabilité**
   Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k \geq 0$ et si $u_k = o_{k\to+\infty}(v_k)$ alors :
   (a) Si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ converge, alors la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge.
   (b) Si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge, alors la série $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge.

Le critère d'équivalence d'applique aussi avec des séries à termes négatifs (nouveau programme).

# IV. Absolue convergence

**Définition IV.1**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.

**Théorème IV.1**
Toute série absolument convergente est convergente.

**Remarque**
La réciproque est fausse. Par exemple la série harmonique alternée $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ n'est pas absolument convergente, mais est convergente. Une telle série est dite semi-convergente.

**Exercice 2**
On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.
3. La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ est-elle absolument convergente ?

## V. Exercices d'application

**Exercice 3**
Déterminer la nature et calculer la somme des séries de terme général $u_n$ et de premier terme $u_0$ dans les cas suivants:

$$a.u_n = \left(\frac{-1}{3}\right)^{2n+3} \qquad b.u_n = \frac{n-2}{3^n} \qquad c.u_n = \frac{n}{(n+1)!}$$
$$d.u_n = (n^2-n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad e.u_n = \frac{2^n n^2 + n!}{3^{n+1} n!} \qquad f.u_n = \frac{2^n \ln^n(5)+1}{n!}$$

**Exercice 4**
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n$ dans les cas suivants:

1. $\forall n \geqslant 0,\ u_n = e^{-\sqrt{n}}$.
2. $\forall n \geqslant 0,\ u_n = e^{-n^2}$.
3. $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$.
4. $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

**Exercice 5**

On admettra que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. Justifier que la série de terme général $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge et que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.
2. En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge et que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

**Exercice 6**

1. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n$ où $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}$.
3. On note, pour tout entier $n$ tel que $n \geqslant 2$: $a_n = -1 - \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} a_n$ converge.



**Exercice 7**

1. Prouver la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n-1}{n!}$ et calculer sa somme.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$.
   (a) Déterminer les trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout entier $n$ non nul: $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.
   (b) Montrer que la série de terme général $u_n$ est convergente et calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

**Exercice 8**

1. Justifier la convergence de la série numérique suivante: $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$
2. Justifier la convergence de la série numérique suivante: $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n)}{n^2}$

**Exercice 9**
**La constante d'Euler : un grand classique !!!**

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

1. Informatique : Ecrire un programme en langage Scilab qui demande un entier $n \geq 1$ à l'utilisateur, puis qui calcule et affiche la valeur de $w_n$.
2. Justifier que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
3. Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge.
4. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel $\gamma$, appelé *constante d'Euler*.