Chapitre 1 - Révisions d'analyse G : formules de Taylor et DL

I. Formule de Taylor avec reste intégral

Enoncés avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ (différence par rapport au programme précédent...)

Théorème I.1
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I. On a alors, pour tout $(a,b) \in I^2$, l'égalité

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

ou encore en déroulant la somme

$$f(b) = f(a) + f'(a).(b-a) + f''(a).\frac{(b-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a).\frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Remarque
Cas particulier
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I contenant 0. Alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Exercice 1
Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral pour $n = 0$, puis $n = 1$.

Exercice 2
Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $\quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Exercice 3
Soit n un entier naturel. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad e^{-x} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt$. (Eml 2020)

Théorème I.2
Formule de Taylor pour les polynômes
Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n et si a est un réel fixé, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Exercice 4
On travaille dans l'e.v. $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Déterminer la matrice des coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

II. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème II.1
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et $(a,b) \in I^2$.
S'il existe un réel fixé $M > 0$ (indépendant de t) tel que $\forall x \in I$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, alors

$$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M \times \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exercice 5
Savoir écrire avec des pointillés.

Remarque
Cas particulier
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I contenant 0.
S'il existe un réel fixé $M > 0$ (indépendant de t) tel que $\forall x \in I$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, alors

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)| \leq M \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exercice 6
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer ses dérivées successives.
2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tout réel x positif,
$$|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
3. En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

III. Formule de Taylor-Young

Théorème III.1
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et $a \in I$. Il existe une fonction ϵ définie sur I telle que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x) \qquad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$$

Autrement dit, au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{x \to a}((x-a)^n)$$

Remarque
Cas particulier.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I contenant 0. Alors au voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o_{x\to 0}(x^n) = f(0) + f'(0).x + f''(0).\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0).\frac{x^n}{n!} + o_{x\to 0}(x^n)$$

Exercice 7

1. Ecrire cette formule au voisinage de 0 pour la fonction exp et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $Arctan(x)$.

IV. Développements limités

Théorème IV.1
On a au voisinage de 0, pour un entier n quelconque, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_{x\to 0}(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x\to 0}(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x\to 0}(x^{2n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_{x\to 0}(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_{x\to 0}(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o_{x\to 0}(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o_{x\to 0}(x^n)
\end{aligned}$$