Devoir d'entrainement - exercice d'analyse de 1ère année septembre 2024 -temps estimé : 1h30-2h maxi

On convient que pour tout réel x, on a $x^0 = 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales suivantes:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx \quad \text{et} J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx.$$

2. Calculer I_0 et I_1.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.

   (b) En déduire I_2.

   (c) Compléter le script `Python` suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage, pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input("donnez une valeur pour n: "))
a=1/2
b=np.log(2)-1/2
for k in range(2,n+1) :
     aux=a
     a=..........
     b=..........
print(b)
```

4. (a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

5. (a) Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$.

   (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

6. (a) Calculer J_0 puis exprimer pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.

   (b) En déduire la valeur de J_1.

7. En utilisant les questions 5a et 6, compléter le script `Python` suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input('donnez une valeur pour n:'))
J=np.log(2)
for k in range(1,n) :
     J=..........
I=..........
print(I)
```

8. Établir que: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

9. (a) Justifier que la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et préciser la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

   (b) Utiliser la question 5a pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\frac{1}{\alpha n}$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(2) - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

    (a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

(b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n?

11. On se propose, malgré l'impasse de la question précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

   (a) Montrer que si une suite réelle (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

   (b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$.

   (c) En déduire l'égalité suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right).$$

   (d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2)$.

   (e) Conclure.

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer:

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$;

   (b) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$;

   (c) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$.