Corrigé du devoir de vacances - été 2021
Saint Just - ECS2

Exercice 1 : applications linéaires en dimension finie

Partie I

1. Montrons que ϕ est linéaire. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $(P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$.

$$\begin{aligned}\phi(\alpha P+Q) &= X.(\alpha P+Q)+\left(X-X^2\right)(\alpha P+Q)'+\left(\frac{1}{2}X^3-X^2+X-1\right)(\alpha P+Q)'' \\ &= \alpha(X.P+\left(X-X^2\right)P'+\left(\frac{1}{2}X^3-X^2+X-1\right)P'') \\ &\quad +X.Q+\left(X-X^2\right)Q'+\left(\frac{1}{2}X^3-X^2+X-1\right)Q'' \\ &= \alpha\phi(P)+\phi(Q)\end{aligned}$$

Donc l'application ϕ est bien linéaire.

2. $\phi(1)=X$, $\phi(X)=X^2+X-X^2=X$,
$\phi(X^2)=X^3+2X^2-2X^3+X^3-2X^2+2X-2=2X-2$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P=aX^2+bX+c$. Alors par linéarité de ϕ,

$$\phi(P)=a\phi(X^2)+b\phi(X)+c\phi(1)$$

d'où $\phi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ d'après ce qui précède. On en déduit que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
De plus,
$$Im(\phi)=Vect(\phi(1),\phi(X),\phi(X^2))=Vect(X,X,2X-2)=Vec(X,1)=\mathbb{R}_1[X]$$

4.
$$A=Mat_{\mathcal{B}_c}(\phi)=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

5. D'après le théorème du rang, on sait déjà que $\dim(Ker(\phi))=3-\dim(Im(\phi))=3-2=1$.
Soit $P=aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}P \in Ker(\phi) \quad &\Leftrightarrow \quad \phi(P)=0 \Leftrightarrow A\times\begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-2a=0\\c+b+2a=0\\0=0\end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}a=0\\c=-b\end{array}\right. \Leftrightarrow P=bX-b\end{aligned}$$

On en déduit que $Ker(\phi)=\{bX-b;\ b\in\mathbb{R}\}=Vect(X-1)$.

6. D'une part,
$$Mat_{\mathcal{B}_c}(\phi^2)=A^2=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

et d'autre part,

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(\phi^3)=A^3=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Comme $Mat_{\mathcal{B}_c}(\phi^3)=Mat_{\mathcal{B}_c}(\phi^2)$, on en déduit que $\phi^2=\phi^3$.

7. (a) Montrons que la famille $\mathcal{B}'=(X,X-1,\frac{1}{2}X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Comme $Vect(\mathcal{B}')=Vect(X,X-1,\frac{1}{2}X^2)=Vect(1,X,X^2)$, cette famille est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Puisque $Card(\mathcal{B}')=3=\dim(\mathbb{R}_2[X])$, la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) On calcule : $\phi(X)=X$, $\phi(X-1)=X-X=0$, $\phi(\frac{1}{2}X^2)=\frac{1}{2}(2X-2)=X-1$. On en déduit la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$:
$$Mat_{\mathcal{B}'}(\phi)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Partie II

1. (a) D'après le théorème du rang, $\dim(Im(f))=\dim(E)-\dim(Ker(f))=2$.

(b) • Soit $v \in Im(f^2)$. Il existe $u \in E$ tel que $v=f^2(u)$ Alors
$$(f-Id_E)(v)=(f-Id_E)(f^2(u))=f^3(u)-f^2(u)=\vec{0}_E$$
Donc $v \in Ker(f-Id_E)$. On en déduit l'inclusion $Im(f^2) \subset Ker(f-Id_E)$.
• Soit $v \in Ker(f-Id_E)$. Alors $(f-Id_E)(v)=\vec{0}_E$ d'où $v=f(v)$. On en déduit que $v \in Im(f)$. D'où l'inclusion $Ker(f-Id_E) \subset Im(f)$.
Ainsi
$$\boxed{Im(f^2) \subset Ker(f-Id_E) \subset Im(f)}$$

(c) D'après les inclusions ci-dessus,
$$\dim(Im(f^2)) \leq \dim(Ker(f-Id_E)) \leq \dim(Im(f))$$
Comme $f^2 \neq 0$, $\dim(Im(f)) \geq 1$. On en déduit donc que $1 \leq \dim(Ker(f-Id_E)) \leq 2$ et donc $\boxed{\dim(Ker(f-Id_E)) \in \{1,2\}}$

2. On suppose dans cette question que $\dim(Ker(f-Id_E))=2$.

(a) • D'une part, $\dim(Ker(f-Id_E))+\dim(Ker(f))=2+1=3=\dim(E)$.
• D'autre part, montrons que $Ker(f-Id_E) \cap Ker(f)=\{\vec{0}_E\}$.
- Comme $Ker(f)$ et $Ker(f-Id_E)$ sont des s.e.v. de E, $\vec{0}_E \in Ker(f-Id_E) \cap Ker(f)$.
- Soit $v \in Ker(f-Id_E) \cap Ker(f)$. Alors $f(v)-v=\vec{0}_E$ et $f(v)=\vec{0}_E$. On en déduit que $v=\vec{0}_E$.
D'où $Ker(f-Id_E) \cap Ker(f)=\{\vec{0}_E\}$.
• On en déduit que $\boxed{Ker(f-Id_E) \bigoplus Ker(f)=E}$

(b) La famille $\mathcal{B}$ est une base de E car il s'agit de la concaténation des bases des s.e.v. $Ker(f-Id_E)$ et $Ker(f)$ qui sont supplémentaires dans E .
$$Mat_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

3. On suppose dans cette question que $\dim(Ker(f-Id_E))=1$.

(a) Nous avons déjà montré l'inclusion $Im(f^2) \subset Ker(f-Id_E)$. De plus, nous avons aussi vu que $1 \leq \dim(Im(f^2)) \leq \dim(Ker(f-Id_E))$. Comme par hypothèse $\dim(Ker(f-Id_E))=1$, on a $\dim(Im(f^2))=\dim(Ker(f-Id_E))=1$. Finalement, ayant une inclusion et l'égalité des dimensions, $\boxed{Im(f^2)=Ker(f-Id_E)}$

(b) D'après le théorème du rang, $\dim(Ker(f^2))=3-\dim(Im(f^2))=2$.
Montrons que $Ker(f) \subset Ker(f^2)$. Cette inclusion est hyper-classique !
Soit $u \in Ker(f)$. Alors $f^2(u)=f(f(u))=f(\vec{0}_E)=\vec{0}_E$. Donc $u \in Ker(f^2)$. On en déduit l'inclusion demandée.

Il existe donc un vecteur u non nul appartenant à $Ker(f-Id_E)$ et un vecteur v appartenant à $Ker(f^2)$ mais n'appartenant pas à $Ker(f)$.

(c) Justifions que la famille de vecteurs $\mathcal{B}'' = (u,\ f(v)\ ,\ v\ )$ est une base de E.
• Montrons que cette famille est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 f(v) + \lambda_3 v = \vec{0}$$

Alors, en appliquant la fonction f à cette relation, avec $f(f(v)) = f^2(v) = \vec{0}_E$, et avec $f(u) = u$, on obtient

$$\lambda_1 u + \lambda_3 f(v) = \vec{0}_E$$

Puis en réappliquant f, avec encore $f^2(v) = \vec{0}_E$ et $f(u) = u$:

$$\lambda_1 u = \vec{0}_E$$

D'où, comme $u \neq \vec{0}_E$, $\lambda_1 = 0$ puis en remontant : $\lambda_3 f(v) = \vec{0}_E$. Comme $f(v) \neq \vec{0}_E$ (car $v \notin Ker(f)$), $\lambda_3 = 0$. D'où enfin en remontant à la première relation : $\lambda_2 f(v) = \vec{0}_E$ et $\lambda_2 = 0$.
On a enfin $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$: la famille $\mathcal{B}''$ est libre.
• Comme c'est une famille libre et $Card(\mathcal{B}'') = 3 = \dim(E)$, il s'agit bien d'une base de E.

Pour terminer, comme $f(u) = u$, $f(f(v)) = \vec{0}_E$ et $f(v) = f(v)$, on obtient enfin la matrice de f dans la base $\mathcal{B}''$:

$$Mat_{\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve la même matrice que dans l'exemple de la Partie I. !!!

Exercice 2 : longueur des deux premières séries

1. Informatique :

```
p=float(input('Entrer p : '))
a=rp.binomial(1,p)
b=rp.binomial(1,p)
k=1
while a==b :
    b=rp.binomial(1,p)
    k=k+1
end
disp('La longueur de la premiere serie est :', k);
```

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(L_1 = n) = [(\cap_{i=1}^n F_i) \cap P_{n+1}] \cup [(\cap_{i=1}^n P_i) \cap F_{n+1}]$$

Les événements étant deux à deux incompatibles,

$$P(L_1 = n) = P((\cap_{i=1}^n F_i) \cap P_{n+1}) + P((\cap_{i=1}^n P_i) \cap F_{n+1})$$

Les lancers étant indépendants, $\boxed{P(L_1 = n) = pq^n + qp^n}$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = n) &= p\sum_{k=1}^{+\infty} q^k + q\sum_{k=1}^{+\infty} p^k \\ &= pq.\frac{1}{1-q} + qp.\frac{1}{1-p} = q + p = 1\end{aligned}$$

(c) L_1 admet une espérance si et seulement si la série de t.g. $kP(L_1 = k)$ est (absolument) convergente.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} kP(L_1 = k) = pq\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} + pq\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1}$$

La série de t.g. $kP(L_1 = k)$ est donc une combinaison linéaire de séries géométriques dérivées convergentes (car $|q| < 1$ et $|p| < 1$), donc elle converge. On en déduit que L_1 admet une espérance et que

$$E(L_1) = pq \times \frac{1}{(1-q)^2} + pq \times \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{q}{p} + \frac{p}{q} = \frac{p^2 + q^2}{pq}$$

3. On note L_2 la longueur de la deuxième série.

(a) Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^*$.

$$(L_1 = n) \cap (L_2 = k) = [(\cap_{i=1}^n F_i) \cap (\cap_{j=n+1}^{n+k} P_j) \cap F_{n+k+1}] \cup [(\cap_{i=1}^n P_i) \cap (\cap_{j=n+1}^{n+k} F_j) \cap P_{n+k+1}]$$

Les événements étant disjoints,

$$\begin{aligned}&P((L_1 = n) \cap (L_2 = k)) \\ =\ & P((\cap_{i=1}^n F_i) \cap (\cap_{j=n+1}^{n+k} P_j) \cap F_{n+k+1}) + P((\cap_{i=1}^n P_i) \cap (\cap_{j=n+1}^{n+k} F_j) \cap P_{n+k+1})\end{aligned}$$

Les lancers étant indépendants, on obtient enfin
$\boxed{P((L_1 = n) \cap (L_2 = k)) = q^n p^k q + p^n q^k p = p^k q^{n+1} + q^k p^{n+1}}$

(b) Puisque la famille $(L_1 = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements, on a bien la relation $(L_2 = k) = \cup_{n=1}^{+\infty}((L_1 = n) \cap (L_2 = k))$. D'où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}P(L_2 = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((L_1 = n) \cap (L_2 = k)) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^k q^{n+1} + q^k p^{n+1} \\ &= p^k q^2 \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} + q^k p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} = p^k q^2 \times \frac{1}{p} + q^k p^2 \times \frac{1}{q} \\ &= p^{k-1} q^2 + q^{k-1} p^2\end{aligned}$$

D'où, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}}$

(c) La variable aléatoire L_2 admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(L_2 = k)$ converge.

$$kP(L_2 = k) = p^2 kq^{k-1} + q^2 kp^{k-1}$$

Les séries de termes généraux kq^{k-1} et kp^{k-1} sont des séries géométriques dérivées qui convergent car $|p| < 1$ et $|q| < 1$. Donc L_2 admet une espérance.

$$E(L_2) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} = p^2 \times \frac{1}{p^2} + q^2 \times \frac{1}{q^2} = 2$$

4. Montrons d'abord que L_1 admet un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 P(L_1 = k) &= p\sum_{k=1}^{n} k^2 q^k + q\sum_{k=1}^{n} k^2 p^k \\ &= pq^2 \sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} + pq\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} + qp^2 \sum_{k=2}^{n} k(k-1)p^{k-2} + qp\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1}\end{aligned}$$

La série de t.g. $k^2 P(L_1 = k)$ est une combinaison linéaire de séries géométriques dérivées convergentes, donc est convergente. On en déduit que $E(L_1^2)$ existe et que

$$\begin{aligned}E(L_1^2) &= pq^2 \times \frac{2}{(1-q)^3} + pq \times \frac{1}{(1-q)^2} + qp^2 \times \frac{2}{(1-p)^3} + qp \times \frac{1}{(1-p)^2} \\ &= \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} + \frac{2p^2}{q^2} + \frac{p}{q} \\ &= \frac{2q^4 + pq^3 + 2p^4 + qp^3}{p^2 q^2}\end{aligned}$$

Comme L_1 admet un moment d'ordre 2, elle admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\begin{aligned}V(L_1) &= E(L_1^2) - (E(L_1))^2 = \frac{2q^4 + pq^3 + 2p^4 + qp^3}{p^2 q^2} - \frac{p^4 + q^4 + 2p^2 q^2}{p^2 q^2} \\ &= \frac{p^4 + q^4 + pq^3 + qp^3 - 2p^2 q^2}{p^2 q^2} = \frac{p^3(p+q) + q^3(p+q) - 2p^2 q^2}{p^2 q^2} \\ &= \frac{p^3 + q^3 - 2p^2 q^2}{p^2 q^2}\end{aligned}$$

Exercice 3 : étude d'une suite d'intégrales

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = \int_0^1 x^n.\sqrt{1-x^2}\ dx$$

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \mapsto x^n.\sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc W_n est bien définie.

   (b) $W_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.
   (1) La fonction $u \mapsto \sin(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   (2) Bornes $\left\{\begin{array}{l} u=0 \\ u=\frac{\pi}{2}\end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=1\end{array}\right.$
   (3) $dx = \cos(u)du$ (4) $\sqrt{1-x^2}dx = \sqrt{1-\sin^2(u)}.\cos(u)du = \cos^2(u)du$.
   (5) La fonction $u \mapsto \cos^2(u)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   Par changement de variables,

   $$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)du$$

   Comme $\cos^2(u)+\sin^2(u) = 1$ et $\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u)$, on a $\cos^2(u) = \frac{1}{2}(1+\cos(2u))$. D'où

   $$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}du + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u)du \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.[\frac{\sin(2u)}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \text{ car } \sin(0) = \sin(\pi) = 0 \end{aligned}$$

   Par ailleurs, on a directement

   $$W_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} = \int_0^1 x.(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = [-\frac{1}{3}.(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{1}{3}$$

   Bilan : $\boxed{W_0 = \frac{\pi}{4} \text{ et } W_1 = \frac{1}{3}}$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $x \in [0,1]$, $x^{n+1} \leq x^n$ donc $x^{n+1}.\sqrt{1-x^2} \leq x^n.\sqrt{1-x^2}$. En intégrant avec les bornes dans le bon sens : $W_{n+1} \leq W_n$, donc la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$ donc $0 \leq x^n.\sqrt{1-x^2} \leq x^n$.
   En intégrant avec les bornes dans le bon sens,

   $$0 \leq W_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, par encadrement $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$.

   Bilan : $\boxed{\text{la suite } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et } \lim_{n\to+\infty} W_n = 0}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $$W_{2n+1} = \int_0^1 x^{2n+1}.\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 x^{2n}.x\sqrt{1-x^2}dx$$

   On va procéder à un changement de variables !
   (1) Posons $t = x^2$.
   (2) La fonction $x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
   (3) Bornes : Bornes $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=1\end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ t=1\end{array}\right.$
   (3) $du = 2tdt$
   (4) $x^{2n}.x\sqrt{1-x^2}dx = t^n.\sqrt{1-t}.\frac{1}{2}dt$
   (5) La fonction $t \mapsto t^n.\sqrt{1-t}$ est continue sur $[0,1]$.

   Par CDV,

   $$W_{2n+1} = \frac{1}{2}.\int_0^1 t^n.\sqrt{1-t}dt$$

On pose ensuite $u = 1-t$. Avec ce nouveau changement de variables, on obtient alors

$$W_{2n+1} = \frac{1}{2}.\int_1^0 (1-u)^n.\sqrt{u}.(-1)du = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u)^n.\sqrt{u}\ du$$

Par la formule du binôme, on a alors

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}.\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k.u^k du \\ &= \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k.\int_0^1 \sqrt{u}.u^k du \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 \sqrt{u}.u^k du = \int_0^1 u^{k+1/2}du = [\frac{1}{k+3/2}.u^{k+3/2}]_0^1 = \frac{1}{k+3/2}$$

d'où enfin

$$W_{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k.\frac{1}{k+3/2} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+3}.\binom{n}{k}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $$W_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}.\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 x^{n+1}.x.\sqrt{1-x^2}dx$$

   Posons

   $$\begin{array}{ll} u(x) = x^{n+1} & u'(x) = (n+1).x^n \\ v'(x) = x.\sqrt{1-x^2} & v(x) = -3.(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \end{array}$$

   Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut procéder à une IPP.

   $$\begin{aligned} W_{n+2} &= [-3.x^{n+1}.(1-x^2)^{3/2}]_0^1 + 3(n+1).\int_0^1 x^n.(1-x^2)^{3/2}dx \\ &= \frac{n+1}{3}.\int_0^1 x^n.(1-x^2)^{3/2}\ dx \end{aligned}$$

   Puis

   $$\begin{aligned} & W_{n+2} = \frac{n+1}{3}.\int_0^1 x^n.(1-x^2).\sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{n+1}{3}.(W_n - W_{n+2}) \\ \Leftrightarrow\ & (1+\frac{n+1}{3})W_{n+2} = \frac{n+1}{3}.W_n \\ \Leftrightarrow\ & W_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}.W_n \end{aligned}$$

   (b) On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

   $$\mathcal{H}(n) : (n+1)(n+2)(n+3).W_{n+1}.W_n = 6.W_1.W_0$$

   - Initialisation : si $n = 0$, cette relation est évidente.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Alors

   $$\begin{aligned} (n+2).(n+3).(n+4).W_{n+2}.W_{n+1} &= (n+2).(n+3).(n+4).\frac{n+1}{n+4}.W_n.W_{n+1} \\ &\quad \text{d'après la question précédente} \\ &= (n+1)(n+2)(n+3).W_{n+1}.W_n \\ &= 6.W_1.W_0 \text{ par HR} \end{aligned}$$

   - Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)(n+2)(n+3).W_{n+1}.W_n = 6.W_1.W_0 = \frac{\pi}{2}}$

4. (a) La suite (W_n) étant décroissante, on sait déjà que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} \leq W_n$.
De plus, $W_{n+1} \geq W_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}.W_n$.
Enfin, comme W_n est l'intégrale d'une fonction positive, continue, pas identiquement nulle sur $[0,1]$, on a $W_n > 0$.

<u>Bilan</u> : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{n+1}{n+4}.W_n \leq W_{n+1} \leq W_n}$

(b) On en déduit que
$$\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$
et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+4} = 1$, par encadrement $\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ donc $\boxed{W_{n+1} \sim_{n\to+\infty} W_n}$

Avec le 3.(b), on a alors $n^3.W_n^2 \ \sim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{W_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n^3}}}$

5. (a) D'après le 3.(a), pour tout $k \in \mathbb{N}$, $W_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+4}.W_{2k}$.
Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathcal{H}(n) : W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2n+2).2^{2n}.(n!)^2}.\frac{\pi}{2}$$

- <u>Initialisation :</u> si $n = 0$, $W_0 = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{0!}{(2).2^0.(0!)^2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- <u>Hérédité :</u> soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Alors
$$\begin{aligned} W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+4}.\frac{(2n)!}{(2n+2).2^{2n}.(n!)^2}.\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)(2n+4)}.\frac{(2n)!}{(2n+2).2^{2n}.(n!)^2}.\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2.(n+1).(2n+4).2.(n+1).2^{2n}.(n!)^2}.\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(2n+4).2^{2n+2}.((n+1)!)^2}.\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
- <u>Bilan :</u> $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2n+2).2^{2n}.(n!)^2}.\frac{\pi}{2}}$

(b) Le résultat précédent s'écrit aussi
$$W_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+2).2^{2n}}.\frac{\pi}{2}$$
et d'après le 4.(b), $W_{2n} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\pi}}{4n.\sqrt{n}}$. Alors
$$\binom{2n}{n} \sim_{n\to+\infty} (2n+2).2^{2n}.\frac{2}{\pi}.\frac{\sqrt{\pi}}{4n.\sqrt{n}} \sim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

<u>Bilan :</u> $\boxed{\binom{2n}{n} \sim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}}$

(c) D'après le 3.a., $W_{2k} = \frac{2k-1}{2k+2}.W_{2k-2}$. On en déduit le programme Python suivant :

```
import numpy as np

n=int(input('Entrer n : '))
W=np.pi/4. #on définit W0
S=W  #on définit S0
for k in range(1,n+1):    #on calcule S1,..., Sn
    W=(2*k-1)/(2*k+2)*W
    S=S+W
print(W)
print(S)
```

Si $n = 10$, on trouve que $S_{10} \simeq 1,307$