Corrigé Devoir d'entrainement - exercice d'analyse de 1ère année
septembre 2024

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ sont continues sur $[0;1]$ comme fonctions rationnelles définies sur $[0,1]$.
$\boxed{\text{Les intégrales } I_n \text{ et } J_n \text{ sont bien définies quel que soit } n \in \mathbb{N}}$.

2. On a $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+1$, ce qui donne $\boxed{I_0 = \frac{1}{2}}$.

   Ensuite, on a $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}dx$. Pour calculer cette intégrale, on peut utiliser une astuce classique:

   $$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 \frac{1+x-1}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = [\ln(1+x)]_0^1 - I_0 = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

   Ce qui donne finalement : $\boxed{I_1 = \ln(2) - \frac{1}{2}}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. On a :

   $$\begin{aligned} I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2}dx + \int_0^1 \frac{2x^{n+1}}{(1+x)^2}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+x^n}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x^2+2x+1)}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)^2}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \end{aligned}$$

   Et donc finalement $\boxed{I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}}$.

   (b) D'après le résultat précédent, avec $n = 0$, on a $I_2 + 2I_1 + I_0 = 1$, donc $I_2 = 1 - 2I_1 - I_0$. Par conséquent, d'après la question 2, $I_2 = 1 - 2\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$, ce qui donne finalement : $\boxed{I_2 = \frac{3}{2} - 2\ln(2)}$.

   (c) Dans le programme, on utilise une boucle `for`. Le couple (a, b) représente successivement (I_0, I_1) (avant d'entrer dans la boucle), puis (I_1, I_2), puis (I_2, I_3), puis …, puis (I_{n-1}, I_n). On met à jour les variables `a` et `b` dans la boucle en se servant de la relation de récurrence obtenue à la question 3.(a).

```
n=int(input('donnez une valeur pour n :'))
a=1/2
b=np.log(2)-1/2
for k in range(2,n+1) :
    aux=a
    a=b
    b=1/(k-1)-2b-aux
print(b)
```

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Pour tout $x \in [0;1]$, on a $0 \leqslant x \leqslant 1$, donc $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$, et donc $1 \leqslant (1+x)^2 \leqslant 4$ par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 1$, et donc que $0 < \frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 1$. Par conséquent, on a $0 \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n$ (car $x^n \geqslant 0$), et donc, en intégrant sur $[0;1]$:

   $$\int_0^1 0\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \leqslant \int_0^1 x^n dx$$

   Autrement dit : $0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$, c'est-à-dire $\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$.

   (b) Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on déduit de l'encadrement ci-dessus que

   $$\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ converge et que } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0}.$$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Posons

   $$\begin{array}{ll} u(x) = x^n & u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} & v(x) = -\frac{1}{1+x} \end{array}$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. On peut donc intégrer par parties :

   $$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{x^n}{1+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x}dx \\ &= -\frac{1}{2} + n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx \end{aligned}$$

   Autrement dit : $\boxed{I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}}$.

   (b) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \frac{1}{n+1}(I_{n+1} + \frac{1}{2})$. Comme $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.}$

6. (a) En ce qui concerne J_0, on a directement $J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1$, c'est-à-dire $\boxed{J_0 = \ln(2)}$.

   Remarque : on pouvait aussi utiliser la question précédente, en prenant $n = 1$.

   Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

   Ce qui donne finalement $\boxed{J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}}$.

   (b) D'après la question précédente, avec $n = 0$, on a $J_0 + J_1 = 1$, donc $J_1 = 1 - J_0$, c'est-à-dire $\boxed{J_1 = 1 - \ln(2).}$

7. On calcule les premiers termes de la suite (J_k) par récurrence, à l'aide de la relation trouvée à la question 6.(a), et on en déduit I_n à l'aide de la question 5.

```
n=int(input('donnez une valeur pour n :'))
J=np.log(2)
for k in range(1,n) :
    J=1/k-J
I=n*J-1/2
print(I)
```

8. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \text{"} J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \text{"}$$

- Initialisation : pour $n = 1$,
on a $(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = -(\ln(2) - 1) = 1 - \ln(2)$
D'après le 6.(b), $J_1 = 1 - \ln(2)$. Donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
J_{n+1} &= -J_n + \frac{1}{n+1} \quad \text{d'après la question 6.(a)} \\
&= -(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + \frac{1}{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + \frac{1}{n+1} \\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{(-1)^{n}}{n+1} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

$$\boxed{\text{Conclusion : pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).}$$

9. (a) D'après la question 8, on a $|J_n| = \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc en particulier

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leqslant |J_n|.$$

Or, $J_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par encadrement

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

$$\boxed{\text{Conclusion : la série de terme général } \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).}$$

(b) On a vu à la question 5.(a) que $J_n = \dfrac{I_{n+1} + \frac{1}{2}}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, $I_{n+1} + \frac{1}{2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ et $n+1 \underset{n \to +\infty}{\sim} n$, donc $J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}}{n}$, c'est-à-dire $\boxed{J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$.

10. (a) D'après la question 8, on a $u_n = (-1)^n J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or, d'après la question précédente, on a $J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$. D'où $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}}$.

(b) On sait (question 9.(b)) que la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge. On en déduit que la série de terme général $\frac{-1}{2} \times \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.

Autrement dit, $\boxed{\text{la série de terme général } \frac{(-1)^n}{2n} \text{ converge}}$.

Malheureusement, cette série n'est pas à termes positifs (ni négatifs). On ne peut donc pas appliquer le critère de convergence par équivalence pour étudier la convergence de la série de terme général u_n.

Autrement dit, $\boxed{\text{on ne peut rien en déduire concernant } \sum u_n}$.

11. (a) Soit l un réel, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) soient convergentes de limite l. On peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

- version avec des intervalles (version Dodane)
Soit I un intervalle ouvert contenant l.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{2n} = l$, l'intervalle I contient tous les termes d'indices pairs x_{2n} sauf un nombre fini d'entre eux.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{2n+1} = l$, l'intervalle I contient tous les termes d'indices impairs x_{2n+1} sauf un nombre fini d'entre eux.
Finalement, I contient tous les termes x_n sauf un nombre fini d'entre eux.

  On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$.

- version avec des ϵ (version Marconnet)
Soit $\epsilon > 0$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{2n} = l$, il existe un entier N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, $|x_{2n} - l| < \epsilon$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{2n+1} = l$, il existe un entier N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $|x_{2n+1} - l| < \epsilon$. Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Alors pour tout $n \geq N$, $|x_n - l| < \epsilon$.

  On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque. D'après la question 8, on a $J_k = (-1)^k u_k$ et $J_{k+1} = (-1)^{k+1} u_{k+1}$. Or, d'après la question 6.(a), on a $J_k + J_{k+1} = \frac{1}{k+1}$, d'où $(-1)^k u_k + (-1)^{k+1} u_{k+1} = \frac{1}{k+1}$. En multipliant par $(-1)^k (k+1)$, on obtient alors :

$$(k+1) u_k - (k+1) u_{k+1} = (-1)^k$$

c'est-à-dire

$$k u_k + u_k - (k+1) u_{k+1} = (-1)^k$$

ou encore

$$\boxed{u_k = (k+1) u_{k+1} - k u_k + (-1)^k}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. On somme l'égalité ci-dessus pour k entre 1 et n. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \Big((k+1) u_{k+1} - k u_k \Big) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$

c'est-à-dire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Big((k+1) u_{k+1} - k u_k \Big) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$

Or, la somme $\sum_{k=1}^{n}\Big((k+1)u_{k+1}-ku_k\Big)$ est une somme télescopique et $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison -1. On peut donc les calculer. On obtient :

$$S_n=\Big((n+1)u_{n+1}-1u_1\Big)+(-1)\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}$$

Ce qui se simplifie en :

$$\boxed{S_n=(n+1)u_{n+1}-u_1-\frac{1}{2}(1-(-1)^n)}$$

(d) D'après ce qui précède, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}S_{2n}&=(2n+1)u_{2n+1}-u_1-\frac{1}{2}(1-(-1)^{2n})\\&=(2n+1)(-1)^{2n+1}J_{2n+1}-u_1-\frac{1}{2}(1-1)\\&=-(2n+1)J_{2n+1}-u_1\\&=-(2n+1)J_{2n+1}-(\ln(2)-1)\end{aligned}$$

Or, $J_k\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2k}$ d'après la question 9.(c), donc $kJ_k\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$, et donc $(2n+1)J_{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$. Par conséquent, $S_{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\frac{1}{2}-(\ln(2)-1)$, c'est-à-dire $\boxed{S_{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}-\ln(2)}$.

De même, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}S_{2n+1}&=(2n+2)u_{2n+2}-u_1-\frac{1}{2}(1-(-1)^{2n+1})\\&=(2n+2)(-1)^{2n+2}J_{2n+2}-u_1-\frac{1}{2}(1-(-1))\\&=(2n+2)J_{2n+2}-u_1-1\\&=(2n+2)J_{2n+2}-(\ln(2)-1)-1\\&=(2n+2)J_{2n+2}-\ln(2)\end{aligned}$$

Or, de même que ci-dessus, on a $(2n+2)J_{2n+2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$. Par conséquent, $\boxed{S_{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}-\ln(2)}$.

(e) On constate que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent et ont la même limite. On en déduit, d'après le 11.(a) que la suite (S_n) converge vers cette limite.

Conclusion : la suite (S_n) converge et $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}-\ln(2)$. Autrement dit, la série de terme général u_k converge et $\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=\frac{1}{2}-\ln(2)$.

12. D'après la question 9.(b), on a $\ln(2)=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}$. Donc, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a

$$u_k=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}-\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\quad\text{(il s'agit du reste de la série de terme général } u_k\text{)}$$

Le résultat de la question précédente peut donc se réécrire :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\frac{1}{2}-\ln(2)}$$

C'est $\boxed{\text{la réponse c.}}$