DM n° 1 - pour le mardi 17 septembre 2024

Problème d'analyse

On rappelle que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ et tout entier naturel n, on note :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+x+1} \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt$$

PARTIE I : Etude des variations et des limites de f

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $t \in [0, 1]$, on note $g_x(t) = \dfrac{t^x}{1+t}$

1. Justifier que f est définie sur $[0, +\infty[$.
2. Préciser les valeurs de $f(0)$ et $f(1)$.
3. Justifier que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$
5. (a) Déduire des deux questions précédentes que $\forall x \geq 1,\ \frac{1}{x+1} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x}$
   (b) Donner enfin un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ ainsi que la limite de f en $+\infty$.
6. Obtention de valeurs approchées de $f(x)$
   Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_x\left(\frac{k}{n}\right)$.
   (a) Justifier que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x) = f(x)$.
   (b) Ecrire en `Python` un script qui
   - définit la fonction de deux variables $(x, t) \longmapsto \frac{t^x}{1+t}$,
   - demande à l'utilisateur un réel positif x et un entier naturel non nul n,
   - calcule et affiche $T_n(x)$

PARTIE II : f comme somme d'une série convergente

1. Soit x un réel positif fixé.
   (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k+x} = \frac{t^x}{1+t} + (-1)^n \frac{t^{n+1+x}}{1+t}$
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = f(x) + (-1)^n f(n+1+x)$

   (c) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n+x+1}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x+1} = f(x)$.
2. Cas particuliers
   (a) On appelle série harmonique alternée la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ (où $n \geq 1$). Déduire des résultats précédents la convergence de cette série et préciser la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
   (b) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ à l'aide du changement de variable $t = u^2$.
3. Etude de la continuité de f sur $[0, +\infty[$
   (a) Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{1}{k+1+x} - \dfrac{1}{k+1+y}\right| \leq |x-y|.\dfrac{1}{k^2}$
   (b) En déduire que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|\left(\dfrac{1}{(1+x)(1+y)} + \dfrac{\pi^2}{6}\right)$.
   (c) En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $\theta_k : u \longmapsto \frac{(-1)^k}{k+1+u}$
   (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, justifier que θ_k est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et calculer $\theta_k'(u)$ et $\theta_k''(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall h \geq -x, \forall k \in \mathbb{N}^*$, $|\theta_k(x+h) - \theta_k(x) - h\theta_k'(x)| \leq \dfrac{|h|^2}{k^3}$
5. Justifier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \theta_k'(u)$ où $u \in \mathbb{R}_+$.
6. Dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $h \geq -x$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\left|S_n(x+h) - S_n(x) - h\sum_{k=0}^{n} \theta_k'(x)\right| \leq |h| \left|\frac{1}{(1+x+h)(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2}\right| + |h|^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$$
   (b) En déduire que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \geq 0$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2}$
   (d) En déduire la valeur de $f'(0)$.