Programme de colle - **Semaine 1**
du 16 au 20 septembre 2024

Informatique : programmation en langage Python

Révision des instructions sur les matrices : définition d'une matrice, matrices usuelles, opérations usuelles sur les matrices.

Chapitre 1. Révisions d'analyse (tout sauf formules de Taylor)

Seules les preuves indiquées doivent être connues.
Les énoncés doivent être sûs avec précision !!!
FORMULES PAR COEUR !!!

A. Fonctions usuelles

Fonctions puissances, ln, exp, cos, sin, tan, Arctan, partie entière.

Exercice à savoir refaire
Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$. Interprétation graphique.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq x + 1$. Interprétation graphique.

Exercice à savoir refaire
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = Arctan(x) + Arctan(\frac{1}{x})$.
Montrer que g est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Vous préciserez les constantes.

B. Théorèmes classiques

Tous les théorèmes classiques et les définitions sont à connaître !!!

Théorème d'encadrement, théorème de limite monotone pour les fonctions.
Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection.
Nombre dérivé. Dérivée d'une bijection réciproque.
Savoir dériver une fonction composée.
Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, inégalité des accroissement finis.
Théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Convexité : définition, lien avec la dérivée seconde. Propriété vis à vis des tangentes, des cordes.

Exercice à savoir refaire
Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Equivalents classiques, négligeabilité. Révisions autonomes sur les suites (AG, SRL2...)

C. Dérivées n-èmes

Savoir retrouver rapidement les dérivées successives des fonctions $x \mapsto x^n$, des fonctions : inverse, ln, exp, cos, sin et savoir démontrer ces formules par une récurrence (proprement rédigée). Formule de Leibniz.

Exercice à savoir refaire
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 e^{-x}$.
Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer sa dérivée n-ième, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D. Intégrales

Intégrales sur un segment uniquement. Savoir calculer une intégrale "simple" en primitivant directement !!
Tous les théorèmes classiques sur les intégrales (linéarité, Chasles...).
Les deux grandes techniques : intégration par parties, changement de variables.

Exercice à savoir refaire
Calculer $\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}dt$ en posant $x = \sin(t)$.

Exercice à savoir refaire
Des intégrales classiques
On note: $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1 - x)^q dx$.

1. Calculer $I_{p,0}$ pour tout entier naturel p.
2. Montrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad I_{p,q} = I_{q,p}$
3. Exprimer $I_{p+1,q}$ en fonction de $I_{p,q+1}$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
4. Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

Sommes de Riemann : connaître le cours par coeur. Savoir reconnaître une somme de Riemann (avec $a = 0$, $b = 1$ le plus souvent).

E. Séries

Définitions. Reste d'une série convergente.

Exercice à savoir refaire
Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$ converge et calculer sa somme.

Séries de référence : séries de Riemann, séries géométriques et dérivées, série exponentielle.
Critères de convergence d'une série à termes positifs (équivalence, majoration, négligeabilité).
Convergence absolue.