Chapitre 2 - Révisions d'algèbre et compléments : algèbre linéaire en dimension finie

I. Espaces vectoriels de dimension finie

I.1) Sous-espaces vectoriels

Définition I.1
Soit E un espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

1. $F \subset E$
2. $0_E \in F$
3. $\forall (u,v) \in F^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha u + v \in F$ (on dit que F est stable par combinaison linéaire).

Proposition I.1
Soit E un espace vectoriel et F une partie de E. S'il existe des vecteurs u_1, ..., u_p de E tels que

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$$

alors F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 1
On note $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X];\ P(2) = 0\}$.
Montrer que H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 2
Soit A une matrice carrée de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On note $F = \{B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R});\ AB = BA\}$

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2. On suppose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ Justifier que F est un espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 3
On note $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 3y = 2z\}$
Montrer que F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Proposition I.2
1. Soit E un espace vectoriel, F et G deux s.e.v. de E. Alors $F \cap G$ est un s.e.v. de E.
2. Plus généralement si F_1, F_2, ..., F_n sont des s.e.v. de E alors $\bigcap_{k=1}^n F_k$ est un s.e.v. de E.

I.2) Bases en dimension finie connue

Dans cette partie on suppose que E est un e.v. de dimension finie.

Théorème I.1
Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $\mathscr{B}$ une famille formée de vecteurs de E. Alors

$$\begin{aligned} & \mathscr{B} \text{ est une base de } F \\ \Leftrightarrow\ & \mathscr{B} \text{ est libre et génératrice de } F \\ \Leftrightarrow\ & \mathscr{B} \text{ est génératrice de } F \text{ et } \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(F) \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = F \text{ et } \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(F) \\ \Leftrightarrow\ & \mathscr{B} \subset F,\ \mathscr{B} \text{ est libre et } \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(F) \end{aligned}$$

Exercice 4
Soit n un entier naturel non nul.
On considère une famille de polynômes $(P_k)_{k \in [[0,n]]}$ de $\mathbb{R}[X]$, vérifiant :

$$0 \leq deg(P_0) < deg(P_1) < \dots deg(P_n)$$

Justifier que la famille $[P_0, P_1, \dots, P_n]$ est une famille libre.

Retenir : une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Exercice 5
On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

1. Montrer que $\left(1, X-2, (X-2)^2, (X-2)^3\right)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On la note $\mathscr{B}'$.
2. On note $T = -X + X^2$. Donner la matrice $Mat_{\mathscr{B}}(T)$ des coordonnées de T dans la base canonique $\mathscr{B}$, puis la matrice $Mat_{\mathscr{B}'}(T)$ des coordonnées de T dans la base $\mathscr{B}'$.

I.3) Sous-espaces supplémentaires

Théorème I.2
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E et on note $E = F \oplus G$ si :

$E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$
$\Leftrightarrow$ tout vecteur u de E s'écrit de façon unique sous la forme $u = v + w$ où $v \in F$ et $w \in G$.
$\Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$
$\Leftrightarrow$ pour $\mathcal{B}_F = (u_1, \cdots, u_p)$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (v_1, \cdots, v_q)$ est une base de G, la concaténation de ces deux bases $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q)$ est une base de E.

I.4) Somme directe de n sous-espaces

Définition I.2
Soit E un espace vectoriel et $F_1, F_2, \cdots, F_n$ des s.e.v. de E et $F = \sum_{k=1}^n F_k$. On dit que F_1, ..., F_n sont en somme directe si pour tout vecteur $u \in F$, il existe un unique $(u_1, \cdots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $u = u_1 + \cdots + u_n$.
On note alors $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$ ou encore $F = \bigoplus_{k=1}^n F_k$.

Remarque
Attention, si $n \geq 3$, le fait que F_1, ..., F_n soient en somme directe ne peut pas s'exprimer à l'aide d'intersections.
On ne parle d'espaces supplémentaires que dans le cas de deux espaces.

Proposition I.3
Soit $F_1, F_2, \cdots, F_n$ des s.e.v. d'un e.v. E.
Les sous-espaces F_1, ..., F_n sont en somme directe si et seulement si

$$\forall (u_1, \cdots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \quad u_1 + \cdots + u_n = 0_E \Rightarrow u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0_E$$

Proposition I.4
Soit $F_1, F_2, \cdots, F_n$ des s.e.v. d'un e.v. de dimension finie E.
Si les sous-espaces F_1, ..., F_n sont en somme directe alors $\dim(\sum_{k=1}^n F_k) = \sum_{k=1}^n \dim(F_k)$.

Théorème I.3
Soit $F_1, F_2, \cdots, F_n$ des s.e.v. d'un e.v. E de dimension finie, munis respectivement d'une base $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ..., $\mathcal{B}_n$. Alors les propositions suivantes sont équivalents :

1. $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n = E$.
2. les s.e.v. F_1, ..., F_n sont en somme directe et $\sum_{k=1}^n F_k = E$.
3. les s.e.v. F_1, ..., F_n sont en somme directe et $\sum_{k=1}^n \dim(F_k) = \dim(E)$.
4. La famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_1$,..., $\mathcal{B}_n$ est une base de E.

II. Matrices de coordonnées

II.1) Matrice d'un vecteur dans une base

Définition II.1
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour tout vecteur u il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ telle que $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$.

1. Ces nombres λ_1, ..., λ_n sont appelés les **coordonnées** de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. On appelle **matrice des coordonnées de** u **dans la base** $\mathcal{B}$, la matrice colonne notée $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ définie par :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exercice 6
On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
On considère le vecteur $x = (1, 2, \cdots, n)$. Donner la matrice $Mat_{\mathcal{B}_c}(x)$.

Exercice 7
On considère $\mathbb{R}_n[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, \cdots, X^n)$.

1. Justifier que la famille $\mathscr{F} = \big(1, (1+X), \ldots, (1+X)^k, \ldots, (1+X)^n\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P = (1+X)^n$. Donner la matrice des coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_c$, puis dans la base $\mathcal{F}$.

II.2) Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition II.2
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E.
Soit $\mathscr{F} = (u_1, \cdots, u_r)$ une famille de vecteurs de E.

On appelle **matrice des coordonnées de la famille** $\mathscr{F}$ **dans la base** $\mathcal{B}$ et on note $Mat_{\mathcal{B}}(\mathscr{F})$ la matrice obtenue en juxtaposant (ou en concaténant, ou en recollant) les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$Mat_{\mathcal{B}}(\mathscr{F}) = \Big(Mat_{\mathcal{B}}(u_1) \mid Mat_{\mathcal{B}}(u_2) \mid Mat_{\mathcal{B}}(u_3) \mid \ldots \mid Mat_{\mathcal{B}}(u_{r-1}) \mid Mat_{\mathcal{B}}(u_r)\Big)$$

Théorème II.1
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$
Soit $r \in [[1, n]]$ et $\mathscr{F} = (u_1, \cdots, u_r)$ une famille de vecteurs de E.
Si :

1. $r = n$
2. la matrice carrée $Mat_{\mathcal{B}}(\mathscr{F})$ est **inversible**

alors la famille $\mathscr{F}$ est une **base** de E.

Exercice 8
On note $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille (A, B, C, D) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ dans cette base puis dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 9
Soit $i \in [[1, n]]$. On note v_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les $i-1$ premières coordonnées dans la base canonique sont nulles et les suivantes égales à 1.

1. Justifier que la famille $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $x = (1, 2, \cdots, n)$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}}(x)$.

II.3) Matrice de passage

Définition II.3
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une autre base de E.
On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice des coordonnées de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$:

$$P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

Proposition II.1
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une autre base de E.
La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$:

$$(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

Théorème II.2
On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et u un vecteur de E.
Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$. Alors :

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.Mat_{\mathcal{B}'}(u) \quad \Leftrightarrow \quad X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.X'}$$

On peut retenir la formule $\boxed{X = PX'}$

Exercice 10
Dans $\mathbb{R}^2$. Justifier que $\Big((1,0),(1,1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de passage de la base $\Big((1,0),(1,1)\Big)$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11
Dans $\mathbb{R}^4$. On note $f_1 = (1,1,2,1)$, $f_2 = (1,-1,0,1)$, $f_3 = (0,0,-1,1)$ et $f_4 = (1,2,2,0)$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. (a) Ecrire la matrice P des coordonnées de la famille $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En déduire que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer P^{-1}.
3. En déduire les coordonnées du vecteur $x = (-1,1,1,2)$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 12
On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille (A, B, C, D) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ dans cette base puis dans la base canonique.

II.4) Inverse d'une matrice 2×2

Définition II.4
. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de A le réel

$$det(A) = ad - bc$$

Théorème II.3
. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$.
Si c'est le cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

III. Applications linéaires

III.1) Un exercice de révision

On note $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = -3xP(x) + x^2 P'(x)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. (a) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.
   (b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.
3. L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?
4. Déterminer une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f.
5. Déterminer une base de 1'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

III.2) Noyau et image

Définition III.1
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. L'ensemble $Ker(f) = \{u \in E;\ \ f(u) = 0_F\}$ est appelé **noyau de** f.
   Soit $u \in E$. Alors
   $$u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_F$$
2. L'ensemble $Im(f) = \{f(u);\ u \in E\}$ est appelé **image de** f.
   Soit $v \in F$. Alors
   $$v \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists u \in E;\ v = f(u)$$

Proposition III.1

1. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
3. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
4. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
5. Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$

Théorème III.1
Théorème du rang
Soit E un e.v. de dimension finie n et F un e.v.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de dimension finie et

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)}$$

Théorème III.2
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Alors

$$f \text{ est bijective } \Leftrightarrow f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective}$$

III.3) Matrice d'une application linéaire en dimension finie

Définition III.2
Soit E et F deux e.v. de dimension finie, avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$.
Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice à n lignes et p colonnes définie par :

$$Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) = Mat_{\mathcal{B}_F}(f(\mathcal{B}_E)) = Mat_{\mathcal{B}_F}\Big(f(e_1), \cdots, f(e_p)\Big)$$

Si pour tout $j \in [[1, p]]$ on note

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\epsilon_i$$

alors

$$Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

Remarque

- Lorsque $E = F$, la matrice est carrée. Dans ce cas, on utilise souvent deux fois la même base $\mathcal{B}_E$, et on notera $Mat_{\mathcal{B}_E}$ à la place de $Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}$.
- si $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\alpha f + g) = \alpha Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) + Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)$$

III.4) Matrice de l'image d'un vecteur

Théorème III.3
Soit E un e.v. de dimension finie p et F un e.v. de dimension finie n.
Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$.
Les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ sont données par la matrice colonne $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \times Mat_{\mathcal{B}_E}(u)$.
Autrement dit,

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}_F}(f(u)) = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \times Mat_{\mathcal{B}_E}(u)}$$

III.5) Matrice d'une composée

Théorème III.4
Soit E, F et G trois e.v. de dimensions finies, munis respectivement des bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_G$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g) \times Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)}$$

III.6) Endomorphisme bijectif et matrice inversible

Théorème III.5
Soit E un e.v. de dimension finie n, muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Notons $M = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$\begin{aligned} f \text{ est bijective} \quad &\Leftrightarrow \quad M \text{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow \quad rg(f) = \dim(E) \\ &\Leftrightarrow \quad rg(M) = n \end{aligned}$$

Dans ce cas, la matrice de f^{-1} est la matrice inverse de M :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f^{-1}) = M^{-1} = (Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f))^{-1}$$

III.7) Formule de changement de base

Théorème III.6
On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}'}(f) = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}$$

On peut retenir la formule

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

où $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, où A est la matrice dans "l'ancienne base" : $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et A' est la matrice dans la "nouvelle" base : $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 13

1. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

   Déterminer la matrice de f dans la base $\Big((1,1),(1,-2)\Big)$ de $\mathbb{R}^2$.

2. On considère l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$.
   Soit f l'application linéaire donnée par $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (17u+30v, -9u-16v) \end{array}$

   (a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_c$.

   (b) Montrer que les vecteurs $e'_1 = (2,-1)$ et $e'_2 = (-5,3)$ forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$ en utilisant la formule de changement de base.

IV. Polynômes d'endomorphismes et de matrices

IV.1) Polynômes d'endomorphismes

Soit E un e.v. de dimension n. Soit f un endomorphisme de E.

Définition IV.1
Soit r un entier naturel et $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$.
On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum_{k=0}^{r} a_k f^k$. Autrement dit,

$$P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_r f^r$$

Exemple
Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 2x^3 - 5x + 7$ alors $P(f) = 2f^3 - 5f + 7Id_E$.

Proposition IV.1
Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]^2$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(\alpha P + Q)(f) = \alpha P(f) + Q(f) \quad \text{et} \quad (P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$$

Définition IV.2
On dit que le polynôme P est annulateur de f si $P(f) = 0$.

Théorème IV.1
Tout endomorphisme de E admet au moins un polynôme annulateur non nul.
(Admis - sera prouvé pour les matrices)

IV.2) Applications particulières

Définition IV.3
Soit E un e.v. et f un endomorphisme de E.

1. f est une homothétie s'il existe un réel λ tel que $f = \lambda.Id_E$.
2. f est un projecteur si $f \circ f = f$.
3. f est une symétrie si $f \circ f = Id_E$

Exercice 14
Donner un polynôme annulateur de f dans chacun des trois cas ci-dessus.

IV.3) Polynômes de matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Définition IV.4
Soit r un entier naturel et $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$.
On note $P(A)$ la matrice définie par $P(A) = \sum_{k=0}^{r} a_k A^k$.

Exemple
Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 2x^3 - 5x + 7$ alors $P(A) = 2A^3 - 5A + 7I_n$.

Proposition IV.2
Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(\alpha P + Q)(A) = \alpha P(A) + Q(A) \quad \text{et} \quad (PQ)(A) = P(A).Q(A) = Q(A).P(A)$$

Définition IV.5
On dit que le polynôme P est annulateur de A si $P(A) = 0$.

Théorème IV.2
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins un polynôme annulateur non nul.

V. Propriétés des matrices

V.1) Rang d'une matrice

Définition V.1
Soient n et p deux entiers naturels non nuls et A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On notre C_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de A où i est un entier compris entre 1 et p.
On appelle rang de A et on note $rg(A)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice A.
Dit autrement, le rang de A est égal au rang de la famille $(C_1, \cdots, C_p)$

$$rg(A) = dim\,(\text{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_p))$$

Remarque
On note $Im(A) = Vect(C_1, C_2, \ldots, C_p)$. Ainsi $rg(A) = dim(Im(A))$

Proposition V.1
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- $rg(A) \leq n$ et $rg(A) \leq p$
- $rg(A) = p \Leftrightarrow$ la famille des matrices colonnes $[C_1, C_2, \ldots, C_p]$ de A est libre.
- $rg(A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0_{n,p}$
- Si la matrice A est une matrice échelonnée avec exactement r colonnes non nulles alors $rg(A) = r$.

Proposition V.2
Le cas des matrices carrées
Soit n un entier naturel non nul et A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $rg(A) \leq n$
- $rg(A) = n \Leftrightarrow$ est inversible
- $rg(A) = n \Leftrightarrow$ la famille des matrices colonnes $[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ de A forme une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Une matrice A a le même rang que toutes ses matrices réduites de Gauss (c'est à dire les matrices obtenues par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A.)
- Si une matrice réduite de Gauss de A est une matrice échelonnée avec exactement r termes non nuls sur sa diagonale alors $rg(A) = r$.

<u>**Méthode**</u> Pour déterminer le rang d'une matrice A, on commence par

◇ Repérer les colonnes nulles. On peut alors extraire ces colonnes nulles pour obtenir une famille génératrice de Im(A) plus petite.

◇ Repérer les colonnes identiques. Si A possède des colonnes identiques, on peut alors trouver une famille génératrice de Im(A) plus petite.

◇ Repérer les colonnes proportionnelles (ou les lignes) proportionnelles. (règle de colinéarité)

◇ Vérifier la somme des coefficients par ligne. Si cette somme est constante, on additionnera toutes les colonnes.

◇ Chercher des combinaisons linéaires simples entre les colonnes pour obtenir l'une des colonnes en fonction des autres.

◇ Terminer par chercher si les matrices colonnes sont linéairement indépendantes.

Exercice 15
Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Préciser si les matrices précédentes sont inversibles.

Proposition V.3
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$rg(A) = rg({}^tA)$$

Remarque
Le rang d'une matrice est donc aussi égal au rang de sa famille de vecteurs lignes.

V.2) Rang d'un endomorphisme et rang de sa matrice

Définition V.2
Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie.
On appelle **rang de l'endomorphisme** f la dimension de l'image de f.

$$rg(f) = \dim\,(\text{Im}(f))$$

Proposition V.4
Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Le rang de f est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par $\big(f(e_1), \cdots, f(e_n)\big)$. Autrement dit,

$$rg(f) = \dim\,(Vect(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)))$$

Proposition V.5
Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E.Alors

$$rg(f) = rg\big(Mat_{\mathcal{B}}(f)\big)$$

Remarque
Le rang de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.

Exercice 16
Dans chacun des cas suivants, déterminer le rang de f, déterminer une base de l'image, une base du noyau de l'application linéaire f associée canoniquement à A . "Canoniquement" signifie que f est une application linéaire qui va de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$ et dont la matrice dans les bases canoniques correspondantes est A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

V.3) Noyau d'une matrice

Définition V.3
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle noyau de A l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$AX = 0$$

Autrement dit,

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}); \quad AX = 0\}$$

Remarque
$\text{Ker}(A)$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

Théorème V.1
Théorème du rang matriciel
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$rg(A) + \dim(Ker(A)) = p$$

Exercice 17
Déterminer une base du noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

V.4) Matrices semblables

Définition V.4
Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n.
Ces matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque
$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PBP^{-1} \Leftrightarrow A = Q^{-1}BQ$ en posant $Q = P^{-1}$.
La définition est symétrique en A et B !

Proposition V.6
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit f un endomorphisme de E. Alors les deux matrices $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables.

Proposition V.7
Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

Théorème V.2
Deux matrices A et B sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes.

Proposition V.8
Soit A et B deux matrices semblables. Alors elles ont le même rang :

$$A \text{ et } B \text{ semblables} \Rightarrow rg(A) = rg(B)$$

V.5) Trace d'une matrice carrée

Définition V.5
Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A le scalaire noté $Tr(A)$, égal à la somme des coefficients diagonaux de A :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Proposition V.9
1. L'application $A \mapsto Tr(A)$ qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B) \quad \text{et} \quad Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$$

2. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

Remarque
La preuve du 2. est un classique à savoir refaire.

Exercice 18
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = I_n$.

Proposition V.10
Deux matrices semblables ont la même trace. Autrement dit :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad Tr(P^{-1}AP) = Tr(A)$$

Exercice 19
Que vaut $\dim(\mathrm{Im}(Tr))$? $\dim(\mathrm{Ker}(Tr))$?

V.6) Sous-espace stable

Définition V.6
Soit F un s.e.v. de E et f un endomorphisme de E. On dit que F est stable par f si pour tout $u \in F$, $f(u) \in F$. On peut dire aussi que $f(F) \subset F$.

Exemple
Soit E un e.v., f un endomorphisme de E, m un réel.
Les s.e.v. $Ker(f)$, $Ker(f - m.Id_E)$, $Im(f)$ sont stables par f.

Proposition V.11
Soit E un e.v., f un endomorphisme de E. Soit F un s.e.v. de E. Si F est stable par f alors la restriction de f à F est un endomorphisme de F. Autrement dit $f|_F \in \mathcal{L}(F)$.