Exercices - Chapitre 2 - Révisions et compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{B} = [1, X-1, (X-1)^2, \ldots, (X-1)^n]$.

1. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $k \in [[0, n]]$. Déterminer les coordonnées de X^k dans cette base $\mathscr{B}$.
3. Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ vers la base $\mathscr{B}$, puis la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{C}$.

Exercice 2
Noyau et image
Les questions suivantes sont indépendantes.
Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
   (a) Que signifie $\mathrm{Ker}(f) = E$? Que signifie $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$?
   (b) Que signifie $\mathrm{Im}(f) = F$? Que signifie $\mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$?
2. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}(gof) \subset \mathrm{Im}(g)$ et que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(gof)$.
3. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $gof = O_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
4. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $fof = 2f$. Montrer que $\ker(f - 2Id_E) = \mathrm{Im}(f)$.
5. Soit E un espace vectoriel de dimension $2n$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = O_{\mathscr{L}(E)}$ et $rg(f) = n$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 3
Polynômes de Lagrange
Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
On considère $n+1$ réels deux à deux distincts notés $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
On note, pour tout $k \in [[0, n]]$, P_k le polynôme défini par

$$P_k = \prod_{0 \le j \le n,\ j \ne k} \frac{1}{x_k - x_j}(X - x_j)$$

1. On suppose que $n = 2$ dans cette question. Déterminer les polynômes P_0, P_1, et P_2.
2. On revient au cas général. Préciser le degré du polynôme P_k pour tout entier $k \in [[0, n]]$.
3. (a) Pour tout $(k, i) \in [[0, n]]^2$, calculer $P_k(x_i)$. (On distinguera les cas où $i = k$ et $i \neq k$).
   (b) En déduire que la famille $[P_0, P_1, \ldots.., P_n]$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On la notera $\mathscr{B}'$.
4. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $R = Q - \sum_{k=0}^{n} Q(x_k)P_k$.
   (a) Calculer, pour tout $i \in [[0, n]]$, $R(x_i)$.
   (b) En déduire que R est le polynôme nul.
   (c) Préciser les coordonnées du polynôme Q dans la base $\mathscr{B}'$.
5. En déduire la matrice de passage de la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$de $\mathbb{R}_n[X]$ vers la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. On note φ l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \varphi(P) = (P(x_0), P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)) \end{array}$$

   (a) Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$.

   (b) Montrer que φ est un isomorphisme.
   (c) Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
   (d) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 4
On note : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x - 3y + 4z = 0\}$ et $G = Vect((1, 0, 0))$

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer leur dimension.
2. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5
On note $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $a - b - c = 0$ et $a - b - d = 0\}$ et $G = Vect((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0))$

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et préciser leur dimension.
2. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6
Fonctions paires et impaires
On note F l'ensemble des fonctions paires d'une variable réelle.
On note G l'ensemble des fonctions impaires d'une variable réelle.

1. Montrer que F et G sont deux espaces vectoriels.
2. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans l'espace E des fonctions d'une variable réelle.

Exercice 7
Matrices symétriques et antisymétriques
On note F l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et G l'ensemble des matrices anti-symétriques de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

1. On suppose dans cette question que $p = 2$.
   (a) Montrer que F et G sont deux espaces vectoriels et déterminer leur dimension.
   (b) En déduire qu'ils sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Retour au cas général : $p \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que F et G sont des espaces vectoriels.
   (b) Justifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

Exercice 8
Polynômes
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$ par: $\forall P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$, $f(P)(X) = \frac{1}{2}(P(X) - P(-X))$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
3. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.
4. L'endomorphisme f est-il bijectif?
5. Montrer que f est un projecteur.
6. Justifier que $Ker(f) \bigoplus Im(f) = \mathbb{R}_{2n}[X]$.

Exercice 9
Déterminer le rang des matrices suivantes et le cas échéant, une base de leur noyau. Préciser si ces matrices sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 10
On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ une application dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$.

On note $u_1 = (2,-1,-2)$, $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (-2,1,3)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On la note $\mathcal{B}'$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 11
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x-y, x+y)$.
Soit $\mathcal{B} = \big((1,2),(1,1)\big)$ et $\mathcal{B}' = \big((1,1),(1,-1)\big)$ deux familles de $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$
2. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$, puis la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}'$
3. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$
4. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
5. Déterminer une relation entre les matrices P, P^{-1} et N.

Exercice 12
Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur P de A.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Soit n un entier naturel. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par le polynôme P.
4. En déduire pour tout entier n, A^n.

Exercice 13
On note : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + {}^tM$

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le rang de f.
3. Déterminer une base du noyau de f.
4. Montrer que le noyau et l'image de f sont des sous espaces supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Montrer que $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme f.
6. Justifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 2Id)$
7. En déduire qu'il existe une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 14
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

Soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang, et le cas échéant une base du noyau et de l'image de f.
2. On note $e_1' = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2' = e_1 + e_3$ et $e_3' = 3e_1 - 2e_2 - e_3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de E.
   (b) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Que peut-on dire de $H = Vect(e_1', e_2')$ et de la restriction de f à l'espace vectoriel engendré par e_1' et e_2'?

Exercice 15
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.
Soit G l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n dont 1 et -1 sont des racines d'ordre supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, en donner une base.
2. Montrer que G et $\mathbb{R}_3[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 16
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 3$, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on pose $f_k = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i\right) - e_k$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}_1$ de E. Déterminer la matrice P^{-1}.

Exercice 17
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note f_k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x^k \exp(x)$ pour tout x réel.
On note E_k l'espace vectoriel engendré par $f_0, f_1, \cdots, f_k$.
On considère l'application définie, pour tout $f \in E_3$, par $\Phi(f) = f''' - 2f'' + f'$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_k = (f_0, f_1, \cdots, f_k)$ est une base de E_k.
2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_3.
3. Déterminer la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}_3$ de E_3.

Exercice 18
Soit n un entier naturel non nul fixé.
Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'application Δ qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme $\Delta(P)$ défini par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$
On note $\mathcal{C} = (P_0, P_1, \cdots, P_n)$ la base canonique de E, où $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_k(x) = x^k$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E.
2. (a) Soit P un élément de $\mathrm{Ker}(\Delta)$. Montrer que $P - P(0)$ admet une infinité de racines. En déduire que P est un polynôme constant.
   (b) Déterminer le noyau de Δ.
   (c) L'endomorphisme Δ est-il bijectif ?
3. (a) Déterminer l'image par Δ du polynôme constant $P_0 = 1$. Déterminer $\Delta(P_k)$ pour tout entier k de $[[1, n]]$.
   (b) En déduire la matrice de Δ dans la base $\mathcal{C}$.
   (c) Donner une base de l'image de Δ.
4. $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[x]$?
5. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose : $P_k(X) = \frac{1}{k!} X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1)$ et $P_0(X) = 1$.
   (a) Montrer que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E.
   (b) Ecrire la matrice de Δ dans cette base.

Exercice 19
Soit E un espace vectoriel de dimension 4. On note id_E et $0_{\mathscr{L}(E)}$ respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = id_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soient u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, $u^3 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $g = id_E + u + u^2 + u^3$.

1. Soit x un vecteur de E tel que $x \notin Ker\,(u^3)$. Montrer que la famille $(x, u\,(x)\,, u^2\,(x)\,, u^3\,(x))$ est une base de E. On la note $\mathscr{B}$.
2. Déterminer la matrice de g dans cette base $\mathscr{B}$. En déduire que g est un automorphisme de E.
3. Calculer $go(id_E - u)$. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

Exercice 20

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $x \in E$ tel que $u^2(x) \neq 0$.
   Montrer que $(x, u(x), u^2(x))$ est libre.
2. ***Généralisation*** : Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
   On suppose qu'il existe un entier naturel p non nul tel que $f^p \neq \mathcal{O}_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{p+1} = \mathcal{O}_{\mathscr{L}(E)}$.
   (a) Montrer qu'il existe x dans E tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^p(x))$ soit libre.
   (b) Montrer que l'espace vectoriel $Vect(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^p(x))$ est stable par f.
   (c) Montrer que la famille $(Id_E, f, f^2, \ldots, f^p)$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E)$.
3. Montrer que si E est de dimension finie n et si $f^{n+1} = \mathcal{O}_{\mathscr{L}(E)}$, alors $f^n = \mathcal{O}_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 21
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit λ un réel. Montrer que les sous-espaces stables par f sont exactement ceux qui sont stables par $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^n}$.
2. Quel lien y a-t-il entre les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par f et ceux qui sont stable par f^2?
3. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Soit $p \neq q$.
   Montrer que si $Vect(e_p)$, $Vect(e_q)$ et $Vect(e_p + e_q)$ sont stables par f alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $f(e_p) = \lambda e_p$ et $f(e_q) = \lambda e_q$.
   (b) Que dire des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui laissent stables toutes les droites vectorielles ?

Exercice 22
Noyaux itérés
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Soit p un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^p) \subset \mathrm{Ker}(f^{p+1})$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(f^p)$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{O_E\}$.
   (b) En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie alors :
   $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \bigoplus \mathrm{Im}(f) = E$.
3. Montrer que : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$

Exercice 23
Soit E un e.v. sur $\mathbb{R}$ de dimension finie non nulle, et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 3f^2 - 2f$.

1. Prouver par analyse-synthèse que
$$Ker(f) \oplus Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f - 2Id_E) = E$$
2. Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.
3. On considère les trois polynômes
$$P_0 = (X-1)(X-2) \qquad P_1 = X(X-2) \qquad P_2 = X(X-1)$$
   (a) Justifier que $\mathcal{D} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
   (b) Déterminer les coordonnées de 1 dans la base $\mathcal{D}$.
   (c) Soit $x \in E$. Justifier que pour $j = 0$, $j = 1$, $j = 2$, on a $P_j(f)(x) \in Ker(f - jId_E)$, puis que $x \in \sum_{j=0}^{2} Ker(f - jId_E)$.
   (d) Reprouver finalement que $Ker(f) \oplus Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f - 2Id_E) = E$