Corrigé du DM n° 1 - pour le mardi 17 septembre 2024

Problème d'analyse

On rappelle que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ et tout entier naturel n, on note :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+x+1} \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt$$

PARTIE I : Etude des variations et des limites de f

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $t \in [0, 1]$, on note $g_x(t) = \frac{t^x}{1+t}$

1. Soit $x \in [0; +\infty[$. La fonction $g_x : t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est continue sur $[0, 1]$ et donc $f(x) = \int_0^1 g_x(t)dt$ est bien définie.
   Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } [0; +\infty[}$
2. $$f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \ln(2)$$
   $$f(1) = \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{1+t-1}{1+t}dt = 1 - \ln(2)$$
3. Soit $(x, y) \in [0; +\infty[^2$ avec $x \leq y$. Alors pour tout $t \in [0, 1]$, $t^x \geq t^y$. D'où $\frac{t^x}{1+t} \geq \frac{t^y}{1+t}$, puis en intégrant (bornes dans le bon sens $0 < 1$), $f(x) \geq f(y)$.

   Bilan : $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0; +\infty[}$
4. $\forall x \geq 0$,
   $$f(x)+f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x + t^{x+1}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^x(1+t)}{1+t}dt = \int_0^1 t^x dt = [\frac{1}{x+1}t^{x+1}]_0^1 = \frac{1}{x+1}$$

   Bilan : $\boxed{\forall x \geq 0,\ f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}}$
5. (a) Pour tout $x \geq 1$, comme f est décroissante,
   $$\begin{aligned} & f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1) \\ \Rightarrow\ & f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x-1) + f(x) \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{x+1} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x} \end{aligned}$$

   (b) On en déduit que pour $x \geq 1$,
   $$\frac{x}{x+1} \leq 2x.f(x) \leq 1$$
   Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, par encadrement $\lim_{x\to+\infty} 2x.f(x) = 1$ soit aussi $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} = 1$.

   Bilan : $\boxed{f(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}}$ et donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$
6. Obtention de valeurs approchées de $f(x)$

   Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g_x\left(\frac{k}{n}\right)$.

   (a) Soit $x \in [0; +\infty[$. Nous avons déjà dit que la fonction g_x est continue sur $[0, 1]$. On reconnait alors que $T_n(x)$ est une somme de Riemann associée à la fonction g_x, et d'après le cours :
   $$\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = \int_0^1 g_x(t)dt = f(x)$$

   (b)
```
def g(x,t):
   return (t**x)/(1+t)
n=int(input("Entrer un entier n>0 : "))
x=float(input("Entrer un réel x positif : "))
T=0
for k in range(1,n+1):
   T=T+g(x,k/n)
T=(1/n)*T
print("T_n=",T)
```


PARTIE II : f comme somme d'une série convergente

1. Soit x un réel positif fixé.

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, +\infty[$,
   $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k+x} &= t^x.\sum_{k=0}^{n}(-t)^k \\ &= t^x.\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} \quad \text{car } 1+t \neq 0 \\ &= \frac{t^x}{1+t} + (-1)^n\frac{t^{n+1+x}}{1+t} \end{aligned}$$

   (b) En intégrant avec t entre 0 et 1 dans cette égalité, les fonctions étant toutes continues :
   $$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\int_0^1 t^{k+x}dt = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt + (-1)^n.\int_0^1 \frac{t^{n+1+x}}{1+t}dt \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\frac{1}{k+x+1} = f(x) + (-1)^n.f(x+n+1) \\ \Leftrightarrow\ & S_n(x) = f(x) + (-1)^n f(n+1+x) \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{S_n(x) = f(x) + (-1)^n f(n+1+x)}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|(-1)^n.f(n+1+x)| = f(n+1+x)$, et comme $\lim_{n\to+\infty} f(n+1+x) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, par encadrement $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n f(n+1+x) = 0$. D'où $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$.

Bilan : $\boxed{\text{la série de terme général } \frac{(-1)^n}{n+x+1} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x+1} = f(x)}$

2. Cas particuliers

(a) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$$

$S_n(0)$ est donc une somme partielle de la série harmonique alternée. On déduit alors du résultat du II.2. que la série harmonique alternée est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = f(0) = \ln(2)$$

(b) $f(\frac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$.
(1) Posons $t = u^2$.
(2) La fonction $u \mapsto u^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
(3) Bornes : $\begin{cases} u = 1 \\ u = 0 \end{cases} \to \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$
(4) $dt = 2u.du$
(5) $\frac{\sqrt{t}}{1+t} dt = \frac{\sqrt{u^2}}{1+u^2}.2udu = \frac{2u^2}{1+u^2} du$.
(6) La fonction $u \mapsto \frac{2u^2}{1+u^2}$ est bien continue sur $[0,1]$.

Par changement de variables,

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}) &= \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du = 2.\int_0^1 \frac{1+u^2-1}{1+u^2} du \\ &= 2.\int_0^1 1du - 2.\int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = 2 - 2.[Arctan(u)]_0^1 \\ &= 2 - 2.\frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{f(\frac{1}{2}) = 2 - \frac{\pi}{2}}$

3. Etude de la continuité de f sur $[0,+\infty[$

(a) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| &= \left|\frac{k+1+y-(k+1+x)}{(k+1+x)(k+1+y)}\right| \\ &= \frac{|x-y|}{(k+1+x)(k+1+y)} \\ &\leq \frac{|x-y|}{k^2} \end{aligned}$$

car $(k+1+x)(k+1+y) \geq k^2$.

(b) Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+y+1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k.(\frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k+y+1}) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k.(\frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k+y+1}) \end{aligned}$$

en sortant le terme en $k=0$ de la somme. Par inégalité triangulaire, on a alors :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}| + \sum_{k=1}^{+\infty} |\frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k+y+1}| \\ &\leq \frac{|x-y|}{(x+1)(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} |x-y|.\frac{1}{k^2} \text{ d'après la question précédente} \\ &\quad \text{Ceci est autorisé car les séries sont convergentes} \\ &\leq |x-y|.(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}) \\ &\leq |x-y|.(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6}) \end{aligned}$$

d'après le résultat rappelé au début du problème.

Bilan : $\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ |f(x) - f(y)| \leq |x-y|\left(\frac{1}{(1+x)(1+y)} + \frac{\pi^2}{6}\right)}$

(c) Soit $x_0 \in [0;+\infty[$. D'après le résultat précédent, pour tout $x \in [0;+\infty[$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|\left(\frac{1}{(1+x_0)(1+x)} + \frac{\pi^2}{6}\right)$$

Comme $\lim_{x\to x_0} |x-x_0|\left(\frac{1}{(1+x_0)(1+x)} + \frac{\pi^2}{6}\right) = 0$, par encadrement $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Par conséquent, f est continue en x_0.
Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in [0;+\infty[$, $\boxed{f \text{ est continue sur } [0;+\infty[}$

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $\theta_k : u \longmapsto \frac{(-1)^k}{k+1+u}$

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction θ_k est une fraction rationnelle définie sur $[0;+\infty[$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;+\infty[$. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$:

$$\theta_k'(u) = (-1)^k.(-\frac{1}{(k+1+u)^2}) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+u)^2} = (-1)^{k+1}.(k+1+u)^{-2}$$

$$\theta_k''(u) = (-1)^{k+1}.(-2).(k+1+u)^{-3} = (-1)^{k+2}.\frac{2}{(k+1+u)^3}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$,

$$|\theta_k''(u)| = \frac{2}{(k+1+u)^3} \leq \frac{2}{k^3}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et h tel que $h \geq x$. Alors $x+h \in \mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée à la fonction θ_k avec $a = x$ et $b = x+h$, qui appartiennent bien à $\mathbb{R}_+$, on a

$$|\theta_k(x+h) - \theta_k(x) - (x+h-x).\theta_k'(x)| \leq \frac{2}{k^3}.\frac{(x+h-x)^2}{2}$$

et on obtient bien

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \forall h \geq -x, |\theta_k(x+h) - \theta_k(x) - h\theta_k'(x)| \leq \frac{|h|^2}{k^3}}$$

5. La série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^3}$ est une série de Riemann qui converge bien car $3 > 1$.
Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|\theta_k'(u)| \leq \frac{1}{(k+1+u)^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Par critère de majoration, la série $\sum_{k\geq 0} \theta_k'(u)$ est absolument convergente, elle est donc convergente.

6. Dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $h \geq -x$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
|S_n(x+h) - S_n(x) - h.\sum_{k=0}^{n} \theta_k'(x)| &= |\sum_{k=0}^{n} \theta_k(x+h) - \sum_{k=0}^{n} \theta_k(x) - h.\sum_{k=0}^{n} \theta_k'(x)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} |\theta_k(x+h) - \theta_k(x) - h.\theta_k'(x)| \\
&\quad \text{par linéarité de la somme et inégalité triangulaire} \\
&\leq |\theta_0(x+h) - \theta_0(x) - h.\theta_0'(x)| + \sum_{k=1}^{n} \frac{|h|^2}{k^3}
\end{aligned}$$

En sortant le terme en $k = 0$ de la somme et en utilisant l'inégalité ci-dessus.
Comme $\theta_0(x) = \frac{1}{1+x}$ et $\theta_0'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$:

$$\begin{aligned}
|\theta_0(x+h) - \theta_0(x) - h.\theta_0'(x)| &= |\frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{h}{(1+x)^2}| \\
&= |\frac{-h}{(1+x+h)(x+1)} + \frac{h}{(1+x)^2}| \\
&= |h|.|\frac{1}{(1+x+h)(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2}|
\end{aligned}$$

en remplaçant dans l'inégalité ci-dessus, on obtient bien : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $h \geq -x$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{|S_n(x+h) - S_n(x) - h\sum_{k=0}^{n} \theta_k'(x)| \leq |h|\left|\frac{1}{(1+x+h)(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2}\right| + |h|^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}}$$

(b) Les séries étant toutes convergentes, on obtient en passant à la limite quand $n \to +\infty$:

$$|f(x+h) - f(x) - h.\sum_{k=0}^{+\infty} \theta_k'(x)| \leq |h|\left|\frac{1}{(1+x+h)(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2}\right| + |h|^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

puis en divisant par h, avec $h \geq -x$ et $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{k=0}^{+\infty} \theta_k'(x)| \leq \left|\frac{1}{(1+x+h)(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2}\right| + |h|.\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Comme $\lim_{h\to 0} \left|\frac{1}{(1+x+h)(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2}\right| + |h|.\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = 0$, par encadrement on obtient que $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{k=0}^{+\infty} \theta_k'(x)|$.

Bilan : $\boxed{f \text{ est dérivable sur } [0, +\infty[\text{ et } \forall x \geq 0,\ f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}}$

(c) On revient sur une question moins ardue...
De façon classique, on sépare les termes d'indices pairs et impairs.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{2i+1}}{(2i+1)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{2i}}{(2i)^2} + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(2i+1)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i)^2} \\
&= -\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(2i+1)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i)^2} + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(2i+1)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i)^2} \\
&= 2.\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i)^2} \\
&= \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}
\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2}}$

(d) En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette relation :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2}.\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}$$

D'où

$$f'(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Bilan : $\boxed{f'(0) = -\frac{\pi^2}{12}}$