Exercice d'entrainement - analyse 1ère année

Exercice : étude d'une fonction définie par une intégrale

Partie A. Etude d'une suite d'intégrales

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^2 (\ln(t))^n \, dt$.

1. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n existe. Calculer I_0 et I_1.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, convergente, de limite nulle.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = 2.(\ln(2))^{n+1} - (n+1).I_n$

3. (a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \int_0^{\ln(2)} e^u.u^k \, du$.
   (b) Justifier alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\sum_{k=0}^{n} I_k - \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u} du| \leq 2.\frac{(\ln(2))^{n+2}}{(1-\ln(2))}$$

   (c) Prouver que la série $\sum_{k\geq 0} I_k$ est convergente et préciser sa somme $S = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k$.
   (d) A l'aide de ce qui précède et du 2), écrire un programme Python permettant, en calculant les valeurs successives de I_k, de déterminer et d'afficher une valeur approchée à $1/100$ près de l'intégrale $A = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u} \, du$.
   Tapez ce programme sur votre ordinateur et donnez le résultat obtenu.

Partie B. Etude d'une suite de fonctions définies par des intégrales

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction G_n telle que

$$\forall x \in [0;+\infty[, \; G_n(x) = \int_1^2 (\ln(t))^n . \ln(x+t) \; dt$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que G_n est une fonction définie sur $[0;+\infty[$. Montrer que la fonction G_n est croissante sur $[0;+\infty[$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $(x_1, x_2) \in [0;+\infty[^2$.
   Justifier que $\forall t \in [1,2]$, $|\ln(x_2+t) - \ln(x_1+t)| \leq |x_2 - x_1|$.
   (b) Justifier que : $\forall (x_1, x_2) \in [0;+\infty[^2$, $|G_n(x_2) - G_n(x_1)| \leq I_n.|x_2 - x_1|$.
   (c) En déduire que G_n est continue sur $[0;+\infty[$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de $G_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.