Corrigé de l'exercice d'entrainement d'analyse

Exercice : étude d'une fonction définie par une intégrale

Partie A. Etude d'une suite d'intégrales

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^2 (\ln(t))^n \, dt$.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (\ln(t))^n$ est continue sur $[1, 2]$, donc I_n existe.

$$I_0 = \int_1^2 dt = 1$$

$$I_1 = \int_1^2 \ln(t)dt = [t\ln(t) - t]_1^2 = 2\ln(2) - 2 + 1 = 2\ln(2) - 1$$

<u>Remarque :</u> retenir que $t \mapsto \ln(t)$ a pour primitive $t \mapsto t\ln(t) - t$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [1, 2]$,

$$1 \leq t \ \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \ln(t) \leq \ln(2) < 1$$

puisque $\ln(2) \simeq 0,7$. Donc $(\ln(t))^{n+1} \leq (\ln(t))^n$. D'où en intégrant (avec $1 < 2$); $I_{n+1} \leq I_n$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale (avec $1 < 2$). Etant décroissante et minorée par 0, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $(\ln(t))^n \leq (\ln(2))^n$, en intégrant on obtient que

$$0 \leq I_n \leq \int_1^2 (\ln(2))^n dt = (\ln(2))^n$$

Comme $|\ln(2)| < 1$, $\lim_{n\to+\infty}(\ln(2))^n = 0$, donc par encadrement $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

<u>Bilan :</u> $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

2. Posons

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = (\ln(t))^{n+1} \\ v'(t) = 1 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} u'(t) = (n+1).\frac{1}{t}.(\ln(t))^n \\ v'(t) = t \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$. On peut donc procéder à une IPP.

$$I_{n+1} = [t.(\ln(t))^{n+1}]_1^2 - (n+1).\int_1^2 (\ln(t))^n dt = 2.(\ln(2))^{n+1} - (n+1).I_n$$

On a donc bien

$$\boxed{I_{n+1} = [t.(\ln(t))^{n+1}]_1^2 - (n+1).\int_1^2 (\ln(t))^n dt = 2.(\ln(2))^{n+1} - (n+1).I_n}$$

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.
(1) Posons $u = \ln(t)$
(2) La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$ (et strictement croissante)
(3) Bornes : $\left\{\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 1 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} u = \ln(2) \\ u = 0 \end{array}\right.$
(4) $du = \frac{1}{t}dt$ et comme $t = e^u$, $dt = e^u du$
(5) $(\ln(t))^k \ dt = u^k.e^u du$
(6) $u \mapsto u^k.e^u$ est continue sur $[0, \ln(2)]$.

Par changement de variables, on a bien

$$\boxed{I_k = \int_0^{\ln(2)} u^k.e^u du}$$

(b) On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n I_k &= \int_0^{\ln(2)} e^u.\sum_{k=0}^n u^k du \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^{\ln(2)} e^u.\frac{1-u^{n+1}}{1-u}du \\ &= \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u}du - \int_0^{\ln(2)} \frac{u^{n+1}.e^u}{1-u}du \end{aligned}$$

D'où

$$|\sum_{k=0}^n I_k - \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u}du| = |\int_0^{\ln(2)} \frac{u^{n+1}.e^u}{1-u}du|$$

Puis ensuite :

$$\begin{aligned} |\int_0^{\ln(2)} \frac{u^{n+1}.e^u}{1-u}du| &\leq \int_0^{\ln(2)} |\frac{u^{n+1.e^u}}{1-u}|du \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq \int_0^{\ln(2)} \frac{u^{n+1}.e^u}{1-u}du \text{ car tout est positif} \end{aligned}$$

Pour tout $u \in [0, \ln(2)]$, on a $e^u \leq e^{\ln(2)} = 2$, $\frac{1}{1-u} \leq \frac{1}{1-\ln(2)}$ et $u^{n+1} \leq (\ln(2))^{n+1}$.
D'où

$$\frac{u^{n+1}.e^u}{1-u} \leq 2.\frac{(\ln(2))^{n+1}}{(1-\ln(2))}$$

puis en intégrant (avec $0 \leq \ln(2)$) :

$$|\frac{0}{\ln(2)}\frac{u^{n+1}.e^u}{1-u}du| \leq \int_0^{\ln(2)} 2.\frac{(\ln(2))^{n+1}}{(1-\ln(2))}du = 2.\frac{(\ln(2))^{n+2}}{(1-\ln(2))}$$

<u>Bilan :</u> pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{|\sum_{k=0}^n I_k - \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u}du| \leq 2.\frac{(\ln(2))^{n+2}}{(1-\ln(2))}}$

(c) Comme $|\ln(2)| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty}(\ln(2))^{n+2} = 0$. D'où par encadrement, $\lim_{k\to+\infty} \sum_{k=0}^n I_k = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u}du$.

<u>Bilan :</u> $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 0} I_k \text{ est convergente et } S = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u}du}$

(d) D'après ce qui précède, la suite $(\sum_{k=0}^{n} I_k)$ fournit une suite d'approximations de l'intégrale A. Voici donc un programme Python qui convient :

```
import numpy as np
I=1
S=1
n=0
while 2*((np.log(2))**(n+2)))/(1-np.log(2)) > 1/100:
   I=2*(np.log(2))**(n+1)-(n+1)*I
   n=n+1
   S=S+I
print("Valeur approchée de A:", S)
```

On obtient $A \simeq 1.82$ à 10^{-2} près.

Partie B. Etude d'une suite de fonctions définies par des intégrales

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction G_n telle que

$$\forall x \in [0;+\infty[,\ G_n(x) = \int_1^2 (\ln(t))^n.\ln(x+t)\ dt$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier qui est fixé dans cette question.
Soit $x \in [0;+\infty[$. La fonction $t \mapsto (\ln(t))^n.\ln(x+t)$ est continue sur $[1,2]$, donc l'intégrale $\int_1^2 (\ln(t))^n.\ln(x+t)\ dt$ est bien définie et $G_n(x)$ existe.
Finalement, comme pour tout $x \in [0;+\infty[$, $G_n(x)$ existe, on peut dire que G_n est bien définie sur $[0;+\infty[$.

Pour tout $(x,y) \in [0;+\infty[^2$ avec $x \leq y$, pour tout $t \in [1,2]$, on a $\ln(x+t) \leq \ln(y+t)$ par croissance de la fonction ln. D'où

$$(\ln(t))^n.\ln(x+t) \leq (\ln(t))^n.\ln(y+t)$$

puis en intégrant avec les bornes dans le bon sens, $G_n(x) \leq G_n(y)$.

Bilan : $\boxed{\text{la fonction } G_n \text{ est définie sur } [0;+\infty[\text{ et croissante sur cet intervalle}}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) La fonction ln est dérivable sur $[1;+\infty[$, et $\forall x \in [1;+\infty[$, $|\ln'(x)| = |\frac{1}{x}| \leq 1$. On en déduit d'après l'inégalité des accroissements finis que :
pour tout $(a,b) \in [1;+\infty[$, $|\ln(a) - \ln(b)| \leq |a-b|$.
Soit $(x_1,x_2) \in [0;+\infty[^2$ et $t \in [1,2]$. En appliquant le résultat précédent avec $a = x_2 + t$ et $b = x_1 + t$, qui appartiennent bien à $[1;+\infty[$:

$$|\ln(x_2+t) - \ln(x_1+t)| \leq |(x_2+t) - (x_1+t)| = |x_2 - x_1|$$

Bilan : $\boxed{\forall (x_1,x_2) \in [0;+\infty[^2,\ \forall t \in [1,2],\ |\ln(x_2+t) - \ln(x_1+t)| \leq |x_2 - x_1|}$

(b) On travaille de proche en proche. Pour tout $(x_1,x_2) \in [0;+\infty[^2$,

$$\begin{aligned}
|G_n(x_2) - G_n(x_1)| &= |\int_1^2 (\ln(t))^n.\ln(x_2+t)\ dt - \int_1^2 (\ln(t))^n.\ln(x_1+t)\ dt| \\
&\leq |\int_1^2 (\ln(t))^n.(\ln(x_2+t).\ln(x_1+t))\ dt| \text{ par linéarité de l'intégrale} \\
&\leq \int_1^2 (\ln(t))^n.|\ln(x_2+t).\ln(x_1+t)|\ dt \text{ par inégalité triangulaire,} \\
&\quad \text{et avec } \ln(t)^n \geq 0 \\
&\leq |x_2 - x_1|.\int_1^2 (\ln(t))^n dt \\
&\leq |x_2 - x_1|.I_n
\end{aligned}$$

Bilan :

$$\boxed{\forall (x_1,x_2) \in [0;+\infty[^2,\ |G_n(x_2) - G_n(x_1)| \leq I_n.|x_2 - x_1|}$$

(c) Très très classique !!!
Soit $x_0 \in [0;+\infty[$. D'après l'inégalité précédente, pour tout $x \in [0;+\infty[$,

$$|G_n(x) - G_n(x_0)| \leq I_n.|x - x_0|$$

Comme $\lim_{x\to x_0} I_n.|x - x_0| = 0$, par encadrement on a $\lim_{x\to x_0} G_n(x) = G_n(x_0)$.
On en déduit que G_n est continue en x_0, et ceci quel que soit $x_0 \in [0;+\infty[$.

Bilan : $\boxed{G_n \text{ est continue sur } [0;+\infty[}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0;+\infty[$, pour tout $t \in [1,2]$, $\ln(x+t) \geq \ln(x)$, d'où $\ln(t)^n.\ln(x+t) \geq \ln(t)^n.\ln(x)$. D'où par croissance de l'intégrale $(1 < 2)$: $G_n(x) \geq \ln(x).I_n$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x).I_n = +\infty$, on trouve finalement que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} G_n(x) = +\infty}$