ECG2 - Lycée Saint Just
Mathématiques Approfondies 2023/24

Programme de colle - **Semaine 2**
du 23 au 27 septembre 2024

`Informatique : programmation en langage Python`

Révision des instructions sur les matrices : définition d'une matrice, matrices usuelles, opérations usuelles sur les matrices.
Calcul d'une somme ou d'un produit : par boucle `for` ou en utilisant les matrices du type `np.arange(1,n+1,1)`

Chapitre 1. Révisions d'analyse

Seules les preuves indiquées doivent être connues.
Les énoncés doivent être sûs avec précision !!!
FORMULES PAR COEUR !!!

A. Fonctions usuelles

Fonctions puissances, ln, exp, cos, sin, tan, Arctan, partie entière.

Exercice à savoir refaire
Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$. Interprétation graphique.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq x + 1$. Interprétation graphique.

Exercice à savoir refaire
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = Arctan(x) + Arctan(\frac{1}{x})$.
Montrer que g est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Vous préciserez les constantes.

B. Théorèmes classiques

Tous les théorèmes classiques et les définitions sont à connaître !!!

Théorème d'encadrement, théorème de limite monotone pour les fonctions.
Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection.
Nombre dérivé. Dérivée d'une bijection réciproque.
Savoir dériver une fonction composée.
Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, inégalité des accroissement finis (deux versions).
Théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Convexité : définition, lien avec la dérivée seconde. Propriété vis à vis des tangentes, des cordes.

Exercice à savoir refaire
Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Equivalents classiques, négligeabilité.

Tous les résultats de 1ère année sur les suites réelles, en particulier suites usuelles : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 (cas $\Delta > 0$ ou $\Delta < 0$).

C. Dérivées n-èmes

Savoir retrouver rapidement les dérivées successives des fonctions $x \mapsto x^n$, des fonctions : inverse, ln, exp, cos, sin et savoir démontrer ces formules par une récurrence (proprement rédigée). Formule de Leibniz.

Exercice à savoir refaire
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 e^{-x}$.
Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer sa dérivée n-ième, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D. Intégrales

Intégrales sur un segment uniquement. Savoir calculer une intégrale "simple" en primitivant directement !!
Tous les théorèmes classiques sur les intégrales (linéarité, Chasles...).
Les deux grandes techniques : intégration par parties, changement de variables.

Exercice à savoir refaire
Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$ en posant $x = \sin(t)$.

Exercice à savoir refaire
Des intégrales classiques
On note: $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Calculer $I_{p,0}$ pour tout entier naturel p.
2. Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad I_{p,q} = I_{q,p}$
3. Exprimer $I_{p+1,q}$ en fonction de $I_{p,q+1}$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
4. Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Sommes de Riemann : connaître le cours par coeur. Savoir reconnaître une somme de Riemann (avec $a = 0$, $b = 1$ le plus souvent).

E. Séries

Définitions. Reste d'une série convergente.

Exercice à savoir refaire
Montrer que la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}$ converge et calculer sa somme.

Séries de référence : séries de Riemann, séries géométriques et dérivées, série exponentielle.
Critères de convergence d'une série à termes positifs (équivalence, majoration, négligeabilité).
Convergence absolue.

F. Formules de Taylor et DL

Formule de Taylor avec reste intégral (énoncé précis !!).
Formule de Taylor pour les polynômes.
Inégalité de Taylor-Lagrange.
Formule de Taylor-Young.
Développements limités en 0 de e^x, $\ln(1+x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$, $(1+x)^\alpha$
FORMULES PAR COEUR !!

Exercice à savoir refaire
Soit n un entier naturel.
Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\quad e^{-x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!}-\int_0^x\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}dt.$

Exercice à savoir refaire
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\ln(1+x)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer ses dérivées successives.
2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tout réel x positif,
$$|\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}|\leq\frac{x^{n+1}}{n+1}$$
3. En déduire que la série $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice à savoir refaire
Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $Arctan(x)$.

Chapitre 2. Révisions d'algèbre linéaire (début)

Seules les preuves indiquées sont exigibles.
Points abordés :

- Savoir montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel (deux méthodes : stabilité par combinaison linéaire (méthode "en trois points") ou s.e.v. engendré).
- Savoir montrer que deux s.e.v. F et G sont supplémentaires dans E : analyse et synthèse, utilisation de la dimension, concaténation de bases.
- Somme directe de n sous-espaces vectoriels.
- Savoir montrer qu'une famille est libre.
- Trouver une base en dimension finie : on commence par écrire F comme un sev engendré.
- <u>Théorème de caractérisation des bases :</u>
  $\mathcal{B}$ libre et $Card(\mathcal{B})=\dim(E)$: $\mathcal{B}$ est une base de E.
  $\mathcal{B}$ génératrice et $Card(\mathcal{B})=\dim(E)$: $\mathcal{B}$ est une base de E.
- Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est une base de E si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est inversible.
- Matrice de passage de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
- **Inverse d'une matrice** 2×2 (*)
  Soit $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de A le réel $det(A)=ad-bc$.
  La matrice A est inversible si et seulement si $det(A)\neq 0$. Si c'est le cas alors
  $$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}.\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$
  Ce résultat est à savoir démontrer (méthode : multiplier A par $B=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ puis distinguer deux cas selon la valeur de $det(A)$)