Chapitre 3 - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel de **dimension finie** non nulle n.

I. Valeurs propres et vecteurs propres

I.1) Eléments propres d'une matrice

On considère une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition I.1
Le scalaire λ est une **valeur propre de** A s'il existe une matrice colonne X **non nulle** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = \lambda X$.
L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre de** A et est noté $Spec(A)$ ou $Sp(A)$.
Si λ est une valeur propre, toute matrice colonne X non nulle telle que $AX = \lambda X$ est appelée **vecteur propre de** A associé à la valeur propre A.
On appelle **sous-espace propre de** A associé à la valeur propre λ l'ensemble

$$Ker(A - \lambda.I) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}); \quad AX = \lambda X\} = Ker(A - \lambda.I)$$

On note aussi $E_\lambda(A)$ cet ensemble.

Remarque
Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est formé de l'ensemble des vecteurs propres associés à λ ainsi que de la matrice colonne nulle.

Théorème I.1
Le scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
En particulier : 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.

Remarque
- Si $n = 2$: utiliser le déterminant pour calculer les valeurs propres de A.
- Sinon, on peut utiliser la méthode des réduites de Gauss.

Exercice 1
1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de A.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de B.

Théorème I.2
Si A est une matrice triangulaire alors les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux.

Proposition I.1
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda X$. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(A)X = Q(\lambda)X$.

Remarque
1. si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors X est aussi un vecteur propre de la matrice $Q(A)$, associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.
2. Si $AX = \lambda X$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$.

Théorème I.3
Soit P un polynôme annulateur de A. Alors toute valeur propre de A est racine de P.

$$Spec(A) \subset \{\text{racines de } \; P\}$$

Théorème I.4
Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède au plus n valeurs propres.

Théorème I.5
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $Spec(A) \neq \emptyset$ alors :

$$Card(Spec(A)) \leq \sum_{\lambda \in Spec(A)} \dim(Ker(A - \lambda I)) \leq n$$

I.2) Eléments propres d'un endomorphisme

Définition I.2
On appelle **valeur propre** de f tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe un vecteur **non nul** $u \in E$ tel que $f(u) = \lambda u$.
On note $Spec(f)$ ou $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f, appelé **spectre** de f.
On appelle vecteur propre de f tout vecteur $u \in E$ **non nul** tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(u) = \lambda u$.
Si λ est une valeur propre de f, on appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ l'ensemble

$$Ker(f - \lambda Id_E) = \{u \in E; f(u) = \lambda u\}$$

On note aussi $E_\lambda(f)$ cet espace vectoriel.

Remarque
1. Si λ est une valeur propre de f, E_λ contient tous les vecteurs propres associés à λ et le vecteur nul.
2. $E_0 = Ker(f)$.

Théorème I.6
1. λ est valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda Id_E$ n'est pas bijective.
2. 0 est valeur propre de f si et seulement si f n'est pas bijective.

Théorème I.7

1. Si $u_1, \cdots, u_p$ sont p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre.
2. Tout endomorphisme d'un ev E de dimension n possède au plus n valeurs propres distinctes.
3. Les sous-espaces propres de f sont en somme directe : $\bigoplus_{\lambda \in Spec(f)} E_\lambda$.
4. Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associées à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E.

Théorème I.8
Pour tout endomorphisme f de E, si $Spec(f) \neq \emptyset$ alors :

$$Card(Spec(f)) \leq \sum_{\lambda \in Spec(f)} \dim(Ker(f - \lambda Id_E)) \leq \dim(E)$$

Proposition I.2
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et x un vecteur de R tel que $f(x) = \lambda x$. Alors pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $Q(f)(x) = Q(\lambda)x$.

Remarque

1. si x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors x est aussi un vecteur propre de l'endomorphisme $Q(f)$, associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.
2. Si $f(x) = \lambda x$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$.

Théorème I.9
Soit P un polynôme annulateur de f. Alors toute valeur propre de f est racine de P.

$$Spec(f) \subset \{\text{racines de } \ P\}$$

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que si F est une droite vectorielle de E, stable par f, alors $F = Vect(u)$ où u est un vecteur propre de f.

II. Diagonalisation

II.1) Endomorphismes diagonalisables

On considère f un endomorphisme de E.

Définition II.1
f est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Théorème II.1
f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Théorème II.2
f est diagonalisable si et seulement si

$$E = \oplus_{\lambda \in Spec(f)} Ker(f - \lambda.Id)$$

Théorème II.3
f est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in Spec(f)} \dim(Ker(f - \lambda Id_E) = \dim(E)$$

Théorème II.4
condition suffisante de diagonalisabilité
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f admet n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable et tout sous-espace propre de f est de dimension 1.

Exercice 3
Soit E un e.v. de dimension n et p un projecteur : $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$.

1. Justifier que $Spec(p) \subset \{0, 1\}$.
2. Montrer que $Ker(p) \oplus Ker(p - Id) = E$ puis diagonaliser p.

II.2) Matrices diagonalisables

Définition II.2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si elle est semblable à une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale.

Remarque
A est diagonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale.

Théorème II.5
A est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{C}' = (U_1, \cdots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (respectivement associés aux valeurs propres λ_1, ..., λ_n). Dans ce cas, la matrice $P = (U_1|U_2 \mid \cdots |U_n)$ (obtenue en concaténant les colonnes U_1, ..., U_n) diagonalise A :

$$P^{-1}.A.P = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

Théorème II.6
A est diagonalisable si et seulement si

$$\oplus_{\lambda \in Spec(A)} Ker(A - \lambda.I) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Théorème II.7
A est diagonalisable si et seulement si
$$\sum_{\lambda \in Spec(A)} \dim(Ker(A-\lambda.I)) = n$$

Théorème II.8
condition suffisante de diagonalisabilité
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Théorème II.9
cas des matrices symétriques
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Proposition II.1
1. Deux matrices semblables A et B ont le même spectre.
2. Les matrices A et ${}^tA$ ont le même spectre.

Pas dans le programme : savoir redémontrer.

Exercice 4
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice admettant une unique valeur propre λ. A quelle condition A est-elle diagonalisable ?

Application de la diagonalisation : calcul des puissances de A
Une application de la diagonalisation d'une matrice A est le calcul de ses puissances A^n. En effet, on sait que si $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$ (récurrence facile) et la matrice D^n est facile à calculer (on élève les coefficients diagonaux à la puissance n).
Le calcul de A^n peut ensuite servir par exemple en probabilités ("chaîne de Markov"), pour l'étude de suites récurrentes linéaires, etc...

II.3) Lien endomorphismes - matrices

Soit E un e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, f un endomorphisme de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Théorème II.10
1. $Spec(f) = Spec(A)$
2. u est un vecteur propre de $f \Leftrightarrow X = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est un vecteur propre de A
3. f est diagonalisable $\Leftrightarrow A$ est diagonalisable.
4. Si $\mathcal{B}' = (u_1, \cdots, u_n)$ est une base de vecteurs propres de f, alors $A = PDP^{-1}$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont associés aux vecteurs propres $u_1, \cdots, u_n$.
5. P est un polynôme annulateur de $f \Leftrightarrow P$ est un polynôme annulateur de A.

II.4) Méthode pratique de diagonalisation d'une matrice :

- On sait que λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda.I$ n'est pas inversible.
  On peut utiliser la **méthode des réduites de Gauss** pour déterminer le spectre de A.
  Il y a parfois plus rapide (polynôme annulateur, matrice annexe liée à A...).
- Une fois que l'on connait le spectre : si λ est une valeur propre de A, chercher ses vecteurs propres revient à calculer $Ker(A - \lambda.I)$, c'est-à-dire à résoudre le système
$$AX = \lambda X$$
- Si A est diagonalisable, la matrice P est obtenue en écrivant en colonne les vecteurs propres de A.

Exercice 5
. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Nous avons déterminé $Spec(A)$ dans l'ex.1. Calculer les sous-espaces propres de A. Montrer alors que A est diagonalisable et diagonaliser A. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6
. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Diagonaliser A, c'est-à-dire : préciser $Spec(A)$ (cf ex.1), trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = P.D.P^{-1}$.

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ remplie de 1 (instruction `np.ones([n,n])` en Python).

1. Déterminer le rang de J.
2. Déterminer un polynôme annulateur de J.
3. En déduire les deux valeurs propres de J.
4. Montrer que J est diagonalisable.
5. Diagonaliser J.
6. Soit $A = J + 2I$. Spectre de A ?
   Diagonaliser A très rapidement.

II.5) Utilisation de la trace

Exercice 8
Retour sur l'exercice précédent.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ remplie de 1.

1. Déterminer le rang de J et en déduire une valeur propre de J.
2. Justifier que J est diagonalisable.
3. En utilisant la trace, déterminer toutes les valeurs propres de J.

Utilisation de la trace :
Deux matrices semblables ont la même trace. Donc si A est diagonalisable, A est semblable à $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
D'où $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ (somme des valeurs propres en tenant compte des multiplicités).