DM n° 2 - pour le mardi 1er octobre 2024

Exercice 1 - Algèbre linéaire

Partie I : Etude d'un cas particulier

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer A^2 et A^3 et donner une relation entre ces deux matrices.
   (b) En déduire un polynôme annulateur P de f que l'on donnera sous forme factorisée.
   (c) Pour tout entier naturel k, expliciter la matrice A^k.
2. (a) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de E ?
   (b) Déterminer, le cas échant, une base de l'image de f et une base de noyau de f.
   (c) Les sous espaces vectoriels $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f^2) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2Id)$.

Partie II : Cas général

On suppose dans cette partie que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit a un réel non nul et g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $g^n = a\ g^{n-1}$.

On cherche à démontrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(g^{n-1}) \oplus \operatorname{Ker}(g - aId)$.

On note $p = \dim\big(\operatorname{Ker}(g^{n-1})\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(g - aId)\big)$.

1. Expliciter un polynôme annulateur de g.
2. (a) Montrer que : $\operatorname{Ker}(g^{n-1}) \cap \operatorname{Ker}(g - aId) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
   (b) En déduire que $p \leq n$.
3. (a) Montrer que : $\operatorname{Im}(g^{n-1}) \subset \operatorname{Ker}(g - aId)$.
   (b) En déduire que $n \leq p$
4. Montrer que les sous-espaces $\operatorname{Ker}(g^{n-1})$ et $\operatorname{Ker}(g - aId)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 - Ecricome

Dans tout cet exercice, on fixe a un réel strictement supérieur à 1. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction polynomiale f_n par

$$f_n\ :\ x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

1. (a) En notant pour tout réel x et pour tout entier naturel k, $t_k(x) = \frac{x^k}{k!}$, exprimer pour k un entier naturel non nul, $t_k(x)$ en fonction de $t_{k-1}(x)$, x et k.
   (b) Recopier et compléter la fonction `Python` suivante qui, prenant en entrée les valeurs de l'entier n et du réel x, renvoie la valeur de $f_n(x)$.

```
def f(n,x):
    t= 1    #t=t_0(x)
    S= 1    #S=f(0,x)
    for k in range(1,n+1)
        t = t * .....
        S= .......
    return ......
```

2. Justifier que, pour tout entier n strictement positif, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, que l'on note u_n.
3. (a) Soit x un réel positif.
   Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est croissante et déterminer sa limite.
   (b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$
   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.
4. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(a) \leqslant u_n$.
   (b) Soit K un réel positif et minorant la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. Montrer que $e^K \leq a$.
   (c) Déduire des questions précédentes que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(a)$.

   On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$R_n(x) = \int_0^x e^t\, \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt$$

5. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.
   On considère dorénavant un réel M strictement positif vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leqslant M$$

   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|R_n(u_n)| \leqslant e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$$

   (c) En déduire que

$$R_n(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

6. (a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = f_n(x) + R_n(x)$$

   (b) En se rappelant que $f_n(u_n) = a$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déduire des deux questions précédentes que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

7. (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t.\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt$$

   (b) En déduire que :

$$e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

   (c) Justifier que $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$, puis que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

   (d) En déduire finalement que : $u_n - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}$