DS n° 1 - lundi 23 septembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans la notation. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *les résultats de leurs calculs. Il est demandé également de numéroter les pages et de numéroter les questions.*

Exercice 1

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note : $\forall n \geqslant 1,\ w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Rappeler les développements limités en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$.
   (b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
   (c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ, appelé **constante d'Euler**.
2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$
   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :
   $$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_{2n} = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$ puis que :
   $$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$
6. Démontrer alors que :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

Exercice 2 - intégrales et séries

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le réel défini par : $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left[\frac{1+t^2}{2}\right]^n dt$

Soit x un réel, on se propose d'étudier la série de terme général $u_n(x) = a_n x^n$

1. **Etude de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

   (a) Montrer que : $\forall t \in [0,1],\ 2t \leq 1+t^2 \leq 1+t$.

   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}.$$

   (c) En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (d) Donner la valeur de a_0. A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation suivante :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n.$$

   (e) Ecrire en `Python` une fonction d'intitulé `def a(n):` qui donne a_n en fonction de n.

2. **Etude de l'absolue convergence de la série**

   Donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la série de terme général $u_n(x)$ soit absolument convergente (on pourra distinguer les cas $|x| \geq 1$ et $|x| < 1$)

3. **Somme de la série pour $-1 \leq x < 1$.**

   Soit x un réel fixé, tel que $-1 \leq x < 1$.

   (a) Montrer que :
   $$\forall t \in [0,1],\ 2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1-x) > 0$$

   (b) Justifier l'existence de l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}\, dt$

   (c) Soit n un entier naturel.

      i. Montrer que :
      $$\sum_{k=0}^{n} u_k(x) = f(x) - x^{n+1} \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} \left[\frac{1+t^2}{2}\right]^{n+1} dt.$$

      ii. En déduire que :
      $$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \right| \leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}.$$

   (d) Montrer enfin que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente et expliciter sa somme en fonction de $f(x)$.

   (e) Ecrire en `Python` un programme calculant et affichant une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-p} près, où x et p sont donnés par l'utilisateur.

Problème

Préliminaire

1. Justifier que $\forall t \in [0,+\infty[,\ 1-t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$
2. En déduire que : $\forall u \in [0,+\infty[,\ u - \dfrac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) \leq u$.

PARTIE I : gestion d'un produit

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,+\infty[$.
Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{n}.f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

1. Soit $x \in [0,1]$.
   (a) A l'aide du préliminaire, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{x^2}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})^2 \leq \ln(u_n(x)) \leq \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$$
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \exp\left(x\int_0^1 f(t)dt\right)$.
2. Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{k+n}\right)$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{n}{n^2+k^2}\right)$
   (a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} P_n$
   (b) Ecrire en Python une fonction intitulée `def P(n):`, calculant P_n. Quelle ligne ajouter au script pour vérifier la cohérence avec le 3.a ?

PARTIE II : Etude d'une série de Riemann

1. Soit g une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$.
   Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^\pi g(t)\sin(At)dt = 0$
2. Soit φ la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(0) = 1$ et $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right], \varphi(x) = \frac{x}{\sin(x)}$
   (a) Montrer que φ est dérivable en 0 et préciser la valeur de $\varphi'(0)$.
   (b) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
3. (a) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, citer les formules classiques donnant $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0,\pi], \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$
4. (a) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt$
   (b) Etablir que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)dt = \frac{1}{k^2}$

5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt$

   (b) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ et préciser la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

PARTIE III : Etude d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, et on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k}$$

ainsi que les intégrales : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$, $J_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{A_n}}} f_n(x)dx$ et $K_n = \int_{\frac{1}{\sqrt{A_n}}}^1 f_n(x)dx$.

1. (a) Calculer I_1 et I_2.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

2. (a) A l'aide du préliminaire, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n - \frac{1}{2}B_n \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq A_n$.

   (b) En déduire que : $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, exprimer $g_n(x) = -\ln(f_n(x))$ à l'aide d'une somme.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \Big[0, +\infty\Big[, \forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-xA_n} \leq f_n(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}B_n - xA_n}$
   (c) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, déterminer $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$

4. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{A_n}}} e^{-xA_n} dx \leq J_n \leq e^{\frac{B_n}{2A_n}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{A_n}}} e^{-xA_n} dx$
   (b) En déduire que : $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{A_n}$.

5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq K_n \leq e^{-\sqrt{A_n}}.\frac{e^{\frac{B_n}{2}}}{A_n}$

   (b) Montrer que : $K_n = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{A_n}\right)$

6. Déterminer enfin un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$, préciser la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que la nature de la série de terme général I_n.