ECG2 - Lycée Saint Just
Mathématiques Approfondies 2024/25

Programme de colle - **Semaine 3**
du 30 septembre au 4 octobre 2024

`Informatique : programmation en langage Python`

Révision des instructions sur les matrices : définition d'une matrice, matrices usuelles, opérations usuelles sur les matrices.
Calcul d'une somme ou d'un produit : par boucle `for` ou en utilisant les matrices du type `np.arange(1,n+1,1)` et les instructions `np.sum`, `np.prod`
Calcul du n-ième terme d'une suite par boucle for.

Chapitre 1. Révisions d'analyse (fin)

F. Formules de Taylor et DL

Formule de Taylor avec reste intégral (énoncé précis !!).
Formule de Taylor pour les polynômes.
Inégalité de Taylor-Lagrange.
Formule de Taylor-Young.
Développements limités en 0 de e^x, $\ln(1+x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$, $(1+x)^\alpha$
FORMULES PAR COEUR !!

Exercice à savoir refaire
Soit n un entier naturel.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt.$

Exercice à savoir refaire
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer ses dérivées successives.
2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tout réel x positif,

$$|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

3. En déduire que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice à savoir refaire
Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $Arctan(x)$.

Chapitre 2. Révisions d'algèbre linéaire (tout)

Seules les preuves indiquées sont exigibles.
Points abordés :

- Savoir montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel (deux méthodes : stabilité par combinaison linéaire (méthode "en trois points") ou s.e.v. engendré).
- Savoir montrer que deux s.e.v. F et G sont supplémentaires dans E : analyse et synthèse, utilisation de la dimension, concaténation de bases.
- Somme directe de n sous-espaces vectoriels.
- Savoir montrer qu'une famille est libre.
- Trouver une base en dimension finie : on commence par écrire F comme un sev engendré.
- <u>Théorème de caractérisation des bases :</u>
  $\mathcal{B}$ libre et $Card(\mathcal{B}) = \dim(E)$: $\mathcal{B}$ est une base de E.
  $\mathcal{B}$ génératrice et $Card(\mathcal{B}) = \dim(E)$: $\mathcal{B}$ est une base de E.
- Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est une base de E si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est inversible.
- Matrice de passage de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
- **Inverse d'une matrice** 2×2 (*)
  Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de A le réel $det(A) = ad - bc$.
  La matrice A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$. Si c'est le cas alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

  Ce résultat est à savoir démontrer (méthode : multiplier A par $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ puis distinguer deux cas selon la valeur de $det(A)$)
- Application linéaire f, noyau et image de f, **théorème du rang**.
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, matrice $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) = Mat_{\mathcal{B}_F}(f(\mathcal{B}_E))$. Attention à l'ordre des bases.
- Relation $Mat_{\mathcal{B}_F}(f(u)) = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f).Mat_{\mathcal{B}_E}(u)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$,

$$Mat_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g).Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$$

- **Formules de changement de bases PAR COEUR**

$$X = P.X'$$

$$A' = P^{-1}.A.P$$

où $X = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, $X' = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$, $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

- Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice.
- **Polynôme annulateur**.
- Rang d'une matrice : définition, méthode de calcul.
- Rang d'un endomorphisme, lien avec le rang de la matrice.
- Noyau d'une matrice.
- **Matrices semblables** : définition. Deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.
- Deux matrices semblables ont le même rang.
- **Trace d'une matrice carrée** :
  1. Définition
  2. Tr est linéaire.
  3. $Tr(AB) = Tr(BA)$ (*) : **à savoir démontrer**, on est obligé de revenir à la définition du produit matriciel.
  4. Deux matrices semblables ont la même trace (*)
- Sous-espace stable : définition.

Chapitre 3. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (début)

Chapitre uniquement en question de cours cette semaine.

I. Valeurs propres et vecteurs propres

1. Cas des matrices

- **Valeur propre d'une matrice, vecteur propre d'une matrice, spectre d'une matrice** : **DEFINITIONS A CONNAITRE**.
  Sous-espace propre associé à la valeur propre λ :

$$E_\lambda(A) = Ker(A - \lambda.I)$$

- λ est valeur propre de A ssi $A - \lambda.I$ n'est pas inversible.
- $0 \in Spec(A)$ ssi A n'est pas inversible.

- Si A est une matrice triangulaire, $Spec(A) = \{$ coeff. diagonaux de $A\}$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda.X$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k.X = \lambda^k.X$ (*)
  Pour tout polynôme Q, on obtient $Q(A).X = Q(\lambda).X$.
- Soit P un polynôme annulateur de A. Alors

$$Spec(A) \subset \{ \text{ racines de } P\}$$

- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède au plus n valeurs propres.

2. Cas des endomorphismes.

Soit E un e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- **Valeur propre d'une matrice, vecteur propre d'un endomorphisme** ($u \in E$ **non nul** tel que...), **spectre d'un endomorphisme**.
  Sous-espace propre associé à la valeur propre λ :

$$E_\lambda(f) = Ker(f - \lambda.Id_E)$$

- λ est valeur propre de f ssi $f - \lambda.Id_E$ n'est pas bijective.
- $0 \in Spec(f)$ ssi f n'est pas bijective.
- Si u_1, ..., u_p sont p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes λ_1, ..., λ_p, alors la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre (*).
- Les sous-espaces propres de f sont en somme directe.
- Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E.
- Pour tout endomorphisme f de E, si $Spec(f) \neq \emptyset$ alors :

$$Card(Spec(f)) \leq \sum_{\lambda \in Spec(f)} \dim(Ker(f - \lambda Id_E)) \leq \dim(E)$$

- Si $f(x) = \lambda x$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$.
  Si Q est un polynôme alors $Q(f)(x) = Q(\lambda).x$.
- Soit P un polynôme annulateur de f. Alors

$$Spec(f) \subset \{\text{racines de } P\}$$