Exercices - Chapitre 3 - Réduction

Exercice 1
Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\phi(P) = P + P'$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer les valeurs propres de ϕ.
4. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable?
5. Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = [e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n]$.
On note $u = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ noté f défini par $\forall k \in [[1, n]]\ f(e_k) = u$.

1. (a) Montrer que u est un vecteur propre de f.
   (b) Justifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$ puis en déduire que $\mathrm{Ker}(f - nId_E) = Im(f)$.
2. (a) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. On la notera A.
   (b) Justifier que $fof = nf$, puis en déduire que $Sp(f) \subset \{0, n\}$.
   (c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (d) Déterminer le spectre de f.
3. En déduire que f est diagonalisable.
4. Déterminer P inversible et D diagonale vérifiant $A = PDP^{-1}$

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $fof = -2f$.

1. Justifier que $Sp(f) \subset \{-2, 0\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f + 2Id_E)$.
4. En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 4
Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?
Si la réponse est oui, donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 10 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A - I_3)^2$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et de I_3.
3. Montrer que A admet une seule valeur propre 1.
4. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
5. Soit n un entier non nul.
   (a) Donner le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$.
   (b) En déduire A^n.

Exercice 6
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_c$ est A.

1. Déterminer la dimension et une base du noyau de f.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D.
3. Déterminer la matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 0 \\ z_0 & = & 0 \end{array} \right. \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} & = & x_n - z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n - 2y_n - z_n \end{array} \right.$$

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - I_3$

1. Déterminer le rang et les valeurs propres de B.
2. En déduire les valeurs propres de A.
3. Déterminer une matrice diagonale Δ et une matrice inversible P telles que $A = P\Delta P^{-1}$.

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A et D sont semblables.
2. Déterminer un polynôme S annulateur de A.

Exercice 9
On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.
On rappelle que $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ est la base canonique de E.

On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste de la division par $1 + X^3$ du polynôme $(1 - X + X^2)P$.
Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que :

$$(1 - X + X^2)P = (1 + X^3)Q + f(P), \quad \text{avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. (a) Déterminer $f(1), f(X)$ et $f(X^2)$ puis vérifier que $f(1) = -f(X) = f(X^2)$.
   (b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. (a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathrm{Im}(f)$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$.
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 10
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $f(A) = A - 2\,{}^tA$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer un polynôme annulateur de f.
4. En déduire les valeurs propres de f.
5. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

Exercice 11
On considère

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.

1. Prouver que f est diagonalisable. Déterminer la matrice de f dans une base de vecteurs propres.
2. Montrer que M' a les mêmes valeurs propres que M.
3. Prouver qu'il existe une matrice P inversible telle que $M' = PMP^{-1}$.

Exercice 12
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E tel que $2f^2 + f - 3\,\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \frac{3}{2}\,\mathrm{Id}_E)$.
2. En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 13
Recherche de commutant - Diagonalisation simultanée
On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable, et déterminer ses valeurs propres.
   Donner alors une matrice P et une matrice diagonale D telle que $P^{-1}AP = D$.

2. Soit M une matrice carrée d'ordre 3 telle que $AM = MA$.
   (a) Montrer que les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de M.
   Question classique mais difficile !!
   (b) En déduire la forme de $P^{-1}MP$.
   (c) Déterminer l'ensemble des matrices M qui commutent avec A (i.e telles que $AM = MA$).

Exercice 14
On considère les deux matrices suivantes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour tous réels a et b, on pose $M_{a,b} = aA + bB$ et on note $E = \{M_{a,b}; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on déterminera la dimension.
2. (a) Exprimer A^2, AB, BA, B^2 comme combinaisons linéaires de A et de B.
   (b) Montrer que le produit de deux matrices de E est une matrice de E et que la multiplication dans E est commutative.
3. (a) Montrer que: $B^3 + B^2 - 2B = 0$.
   (b) Montrer que B est diagonalisable.
   (c) Montrer que tout vecteur propre de B est un vecteur propre de A.
   (d) La matrice A est-elle diagonalisable?
4. Soit $M_{a,b}$ une matrice de E.
   (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice $M_{a,b}$ en fonction de a et b. La matrice $M_{a,b}$ est-elle diagonalisable?
   (b) Existe-t-il des matrices de E inversibles?

Exercice 15
On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 et A^3.
   (b) En déduire que A n'est pas inversible et que A admet 0 pour unique valeur propre.
   (c) Déterminer une base du noyau de A.
   (d) La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On note, pour tout réel a, $M(a) = I + 2aA + 2a^2A^2$ et E l'ensemble de toutes les matrices $M(a)$ lorsque a décrit $\mathbb{R}$.
   (a) Calculer pour tout couple de réels (a, b), la matrice $M(a)M(b)$.
   (b) Justifier que E est stable par produit.
   (c) Justifier que, pour tout réel a, la matrice $M(a)$ est inversible et calculer sa matrice inverse.
3. Soit a un réel non nul.
   (a) Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de $M(a)$.
   (b) Calculer $(M(a) - I)^3$.
   (c) En déduire que la matrice admet pour seule valeur propre la valeur 1.
   (d) La matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 16
Soit a un réel. On note F l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], F(P)(X) = (X-a)P'(X)$$

1. Justifier que $F \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Ecrire la matrice de F dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que F est diagonalisable. Quelle est la dimension de chaque sous-espace propre de F?
4. Déterminer le noyau de F.
5. Soit λ une valeur propre non nulle de F. Soit P un polynôme propre pour F associé à la valeur propre λ.
   (a) Montrer que a est une racine de P.
   Il existe donc un polynôme Q et un entier m non nul tel que $P(X) = (X-a)^m Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$.
   (b) Montrer que $(\lambda - m)Q(X) = (X-a)Q'(X)$.
   (c) En déduire que Q est un polynôme constant. Donner l'espace propre associé à la valeur propre λ.
6. En déduire une base de $\mathbb{R}_n[X]$ composée de vecteurs propres de F.

Exercice 17
Trigonalisation d'une matrice
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A. Notons $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer $Spec(A)$, calculer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer une base $\mathcal{C}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_{\mathcal{C}'}(f) = T$.
3. A l'aide de T, comment calculer A^n ? Expliquer une méthode.

Exercice 18
Endomorphisme et polynôme annulateur
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où $A^2 - 2A = 0$, avec $A \neq 2I$ et $A \neq 0$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Justifier que $Spec(A) = \{0, 2\}$.
2. Justifier que $Im(f) = Ker(f - 2Id)$.
3. Prouver que f est diagonalisable (et donc A aussi !).