Corrigé du DM n° 2 - pour le mardi 1er octobre 2024 -

Exercice 1 - Algèbre linéaire

Partie I : Etude d'un cas particulier

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1. (a) Un simple calcul montre que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $A^3 = 2A^2$, donc $A^3 - 2A^2 = 0$.

(b) Le polynôme $P = X^3 - 2X^2 = X^2(X-2)$ est annulateur de A.
On a donc aussi $P(f) = 0$.

Bilan : $\boxed{\text{le polynôme } P = X^2(X-2) \text{ est annulateur de } f}$

(c) On remarque que $A^4 = A.A^3 = A.2A^2 = 2A^3 = 4A^2$, puis $A^5 = 2^3.A^2$ etc...
Soit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, la propriété $\mathcal{H}(k)$: "$A^k = 2^{k-2}.A^2$".

- Initialisation : si $k = 2$, cette relation est évidente puisque $2^0 = 1$.
- Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, tel que $\mathcal{H}(k)$ est vraie.
  Alors
  $$A^{k+1} = A.A^k = A.(2^{k-2}A^2) = 2^{k-2}.A^3 = 2^{k-2}.2A^2 = 2^{k-1}.A^2$$
  donc $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \geq 2,\ A^k = 2^{k-2}.A^2}$

Comme $A^0 = I_3$ et $A^1 = A$, on connait bien toutes les matrices A^k où $k \in \mathbb{N}$.

2. (a) L'endomorphisme f est un automorphisme de E ssi sa matrice A est inversible.
On raisonne par l'absurde. Supposons que A est inversible. Alors comme $A^3 = 2.A^2$, en multipliant à gauche par A^{-1}, on aurait $A^2 = 2A$, ce qui est faux !
Donc A n'est pas inversible et f n'est pas un automorphisme de E.

Autres méthodes : on montre facilement que $rg(A) = 2$. On peut aussi utiliser les réduites de Gauss, etc...

(b)

$$Im(f) = Vect(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = Vect((1,-1,-2),(1,3,2),(-1,-3,-2)) = Vect((1,-1,-2),(1,3,2))$$

puisque les deux dernières colonnes sont colinéaires. Comme les deux vecteurs $(1-1,-2)$ et $(1,3,2)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre. On en déduit donc que la famille $((1,-1,-2),(1,3,2))$ est une base de $Im(f)$.
Comme $\dim(Im(f)) = 2$, on en déduit par le théorème du rang que $\dim(Ker(f)) = 1$.
Or, comme $f(e_3) = -f(e_2)$, on a $f(e_2 + e_3) = 0$, donc le vecteur $(0,1,1)$ appartient à $Ker(f)$. Comme ce vecteur est non nul, il forme une famille libre de $Ker(f)$. Comme de plus $Card((0,1,1)) = 1 = \dim(Ker(f))$, la famille $((0,1,1))$ est une base de $Ker(f)$.

Bilan : $\boxed{((1,-1,-2),(1,3,2)) \text{ est une base de } Im(f) \text{ et } ((0,1,1)) \text{ est une base de } Ker(f)}$

(c) Les sous espaces vectoriels $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ ssi la concaténation de leurs bases trouvées ci-dessus est une base de $\mathbb{R}^3$. Or

$$Vect((0,1,1),(1,-1,-2),(1,3,2)) = Vect((0,1,1),(1,-1,-2),(0,4,4)) = Vect((1,1,0),(0,4,4))$$

la famille $((1,1,0),(1,-1,-2),(1,3,2))$ est donc de rang 2 : il ne peut pas s'agir d'une base de $\mathbb{R}^3$.

Bilan : $\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ et } \mathrm{Ker}(f) \text{ ne sont pas supplémentaires dans } \mathbb{R}^3}$

3. On sait que f^2 a pour matrice dans la base canonique $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u = (x,y,z) \in Ker(f^2) &\Leftrightarrow A^2.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z = x + y \\ &\Leftrightarrow u = (x, y, x+y) \end{aligned}$$

On en déduit que $Ker(f^2) = Vect((1,0,1),(0,1,1))$. Comme les deux vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre et donc $\mathcal{B}_1 = ((1,0,1),(0,1,1))$ est une base de $Ker(f^2)$.

Comme l'application $f - 2Id$ a pour matrice $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, on obtient avec la même méthode que ci-dessus que

$$\begin{aligned} u = (x,y,z) \in Ker(f - 2Id) &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -2z = 0 \quad L_2 \to L_2 - L_1 \\ -3z = 0 \quad L_3 \to L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = (x, x, 0) \end{aligned}$$

Donc $Ker(f - 2Id) = Vect((1,1,0))$ et comme $(1,1,0)$ n'est pas le vecteur nul, la famille $\mathcal{B}_2 = ((1,1,0))$ est une base de $Ker(f - 2Id_)$.

On considère la famille $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$ obtenue en concaténant les deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Alors de proche en proche :

$$\begin{aligned} Vect(\mathcal{B}) &= Vect((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)) = Vect((1,0,1),(0,1,1),(0,1,-1)) \\ &= Vect((1,0,1),(0,1,1),(0,1,0)) = Vect((1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)) = \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$. De plus, $Card(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La concaténation des bases de $Ker(f^2)$ et de $Ker(f - 2Id)$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Bilan : $\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id)}$

Partie II : Cas général

1. Comme $g^n = a.g^{n-1}$, le polynôme $P = X^n - aX^{n-1} = X^{n-1}.(X-a)$ est annulateur de g.

2. (a) L'inclusion $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \subset \text{Ker}(g^{n-1}) \cap \text{Ker}(g - aId)$ est évidente puisque $\text{Ker}(g^{n-1})$ et $\text{Ker}(g-aId)$ sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
Soit $u \in \text{Ker}(g^{n-1}) \cap \text{Ker}(g-aId)$. Alors $g(u) = au$, donc $g^{n-1}(u) = a^{n-1}.u$ (récurrence facile).
Mais par ailleurs, $g^{n-1}(u) = 0$. Donc $a^{n-1}.u = 0$. Par hypothèse $a \neq 0$, donc $a^{n-1} \neq 0$ et nécessairement $u = 0$.
Ainsi $\text{Ker}(g^{n-1}) \cap \text{Ker}(g-aId) \subset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Bilan : par double inclusion, $\boxed{\text{Ker}(g^{n-1}) \cap \text{Ker}(g-aId) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}}$

(b) D'une part, comme $\text{Ker}(g^{n-1}) + \text{Ker}(g-aId) \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\dim(\text{Ker}(g^{n-1}) + \text{Ker}(g-aId)) \leq n$$

D'autre part, d'après la formule de Grassmann :

$$\begin{aligned}\dim(\text{Ker}(g^{n-1}) + \text{Ker}(g-aId)) &= \dim(\text{Ker}(g^{n-1})) + \dim(\text{Ker}(g-aId)) - \dim(\text{Ker}(g^{n-1}) \cap \text{Ker}(g-aId)) \\ &= \dim(\text{Ker}(g^{n-1})) + \dim(\text{Ker}(g-aId)) \text{ car } \text{Ker}(g^{n-1}) \cap \text{Ker}(g-aId) = \{0\} \\ &= p\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{p \leq n}$

3. (a) Soit $x \in Im(g^{n-1})$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = g^{n-1}(y)$. On en déduit que

$$(g - a.Id)(x) = (g-a.Id) \circ g^{n-1}(y) = (g^n - ag^{n-1})(y) = 0$$

et donc $x \in Ker(g - a.Id)$.

Bilan : $\boxed{\text{Im}(g^{n-1}) \subset \text{Ker}(g-aId)}$

(b) D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} n &= \dim(Ker(g^{n-1})) + \dim(Im(g^{n-1})) \\ &\leq \dim(Ker(g^{n-1}) + \dim(\text{Ker}(g-aId)) \text{ d'après l'inclusion précédente} \\ &\leq p\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{n \leq p}$

4. On déduit des deux questions précédentes que $n = p$.
Ainsi $\dim(Ker(g^{n-1})) + \dim(Ker(g-a.Id)) = \dim(\mathbb{R}^n)$. On sait déjà que $Ker(g^{n-1})$ et $Ker(g-a.Id)$ sont en somme directe.

Bilan : $\boxed{\text{Ker}(g^{n-1}) \oplus \text{Ker}(g-aId) = \mathbb{R}^n}$

Exercice 2 - Ecricome 2022

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$t_k(x) = \frac{x^k}{k!} = \frac{x}{k}.\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{x}{k}.t_{k-1}(x)$$

(b)
```
def f(n,x):
    t=1 // t=t_0(x)
    S=1 // S=f(0,x)
    for k in range(1,n+1):
        t=(x/k)*t
        S=S+t
    return S
```


2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geq 0$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=1} nk.\frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} > 0$$

donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, $f_n(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = +\infty$.
Comme f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, f_n est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $f_n(\mathbb{R}_+) = [1; +\infty[$. Comme $a > 1$, il existe bien un unique $x \geq 0$ tel que $f_n(x) = a$.
Bilan : $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = a \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+, \text{ que l'on note } u_n}$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0$ donc la suite $(f_n(x))_{n\geq1}$ est croissante.
Le réel x étant fixé, $f_n(x)$ est une somme partielle de la série exponentielle. D'après le cours, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x}$

(b) D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(u_n) \geq f_n(u_n)$ donc $f_{n+1}(u_n) \geq a$, c'est-à-dire que $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme la fonction f_{n+1} est croissante, ceci implique que $u_n \geq u_{n+1}$.

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq1} \text{ est décroissante}}$

(c) Comme la suite $(u_n)_{n\geq1}$ est décroissante et minorée par 0, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq1} \text{ converge}}$

4. (a) Pour tout $N \geq n$, on a $f_N(u_n) \geq f_n(u_n) = a$. Comme $\lim_{N\to+\infty} f_N(u_n) = e^{u_n}$ on en déduit par passage à la limite dans une inégalité large que $e^{u_n} \geq a$. On a donc $\boxed{u_n \geq \ln(a)}$

(b) Supposons que K est un réel positif qui minore la suite $(u_n)_{n\geq1}$. Alors par croissance de f_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(K) \leq f_n(u_n) = a$. D'où en passant à la limite quand $n \to +\infty$, $\boxed{e^K \leq a}$ donc $\boxed{K \leq \ln(a)}$

(c) Notons l la limite de la suite $(u_n)_{n\geq1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \ln(a)$ donc $l \geq \ln(a)$.
Comme de plus la suite (u_n) est décroissante, sa limite l est un minorant de (u_n). Donc d'après le 4.(b), $l \leq \ln(a)$.
Finalement, on obtient $\boxed{l = \ln(a)}$

Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(a)}$

5. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par $\ln(a)$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(a) \leq u_n \leq u_1$. Par conséquent $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\,\mathbb{N}^*} \text{ est bien bornée}}$
Soit $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq M$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n(u_n) = \int_0^{u_n} e^t.\frac{(u_n-t)^n}{n!}\,dt$$

De plus, comme $u_n \geq 0$, les bornes sont dans le bon sens et pour tout $t \in [0, u_n]$, $u_n - t \geq 0$ donc $R_n(u_n) \geq 0$.
De plus, pour tout $t \in [0, u_n]$, $e^t \leq e^{u_n} \leq e^M$. D'où :

$$\begin{aligned} |R_n(u_n)| &= R_n(u_n) \\ &\leq e^M.\int_0^{u_n} \frac{(u_n-t)^n}{n!}dt \\ &\leq e^M.[-\frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!}]_0^{u_n} \\ &\leq e^M.\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq e^M.\frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \text{ puisque } u_n \leq M\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |R_n(u_n)| \leq e^M.\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}}$

(c) On en déduit que $|n^2.R_n(u_n)| \leq e^M.n^2.\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$. Or

$$e^M.n^2.\frac{M^{n+1}}{(n+1)!} = e^M.\frac{n}{n+1}.\frac{n}{n}.M^2.\frac{M^{n-1}}{(n-1)!} \sim_{n\to+\infty} e^M.M^2.\frac{M^{n-1}}{(n-1)!} \to_{n\to+\infty} 0$$

puisque l'on reconnait le terme général d'une série exponentielle.
Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2.R_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n(u_n)}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

Bilan: $\boxed{R_n(u_n) = o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})}$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. La fonction exp étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à cette fonction, à l'ordre n, entre 0 et x :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \exp^{(k)}(0).\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}.exp^{(n+1)}(t)dt$$

donc

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}.e^t\ dt = f_n(x) + R_n(x)$$

Bilan : $\boxed{e^x = f_n(x) + R_n(x)}$

(b) On en déduit que $e^{u_n} = f_n(u_n) + R_n(u_n)$, donc $e^{u_n} = a + R_n(u_n)$. Comme $R_n(u_n) \geq 0$, $a + R_n(u_n) > 0$ et $u_n = \ln(a + R_n(u_n))$.

On a donc

$$u_n = \ln(a(1 + \frac{1}{a}.R_n(u_n))) = \ln(a) + \ln(1 + \frac{1}{a}.R_n(u_n))$$

D'après le 5.(b), $|R_n(u_n)| \leq e^M.\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} e^M.\frac{M^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (terme général d'une série exponentielle), par encadrement $\lim_{n\to+\infty} R_n(u_n) = 0$. Par équivalence classique,

$$\ln(1 + \frac{1}{a}.R_n(u_n)) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{a}.R_n(u_n)$$

et comme $R_n(u_n) = o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})$, on a aussi $\ln(1 + \frac{1}{a}.R_n(u_n)) = o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})$.
Bilan : $\boxed{u_n = \ln(a) + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})}$

7. (a) La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction exp, à l'ordre $n+1$, donne directement l'égalité souhaitée :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}.e^t\ dt = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}.e^t\ dt$$

(b) On en déduit que

$$e^{u_n} = a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^{u_n} e^t.\frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt$$

En reprenant pas à pas les majorations de la question 5.(b), on trouve que

$$|\int_0^{u_n} e^t.\frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt| \leq e^M.\frac{u_n^{n+2}}{(n+2)!}$$

donc

$$|\frac{(n+1)!}{u_n^{n+1}}.\int_0^{u_n} e^t.\frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt| \leq e^M.\frac{u_n}{n+2}$$

Comme la suite (u_n) est bornée, $\lim_{n\to+\infty} e^M.\frac{u_n}{n+2} = 0$.
Par conséquent, $\lim n \to +\infty \frac{(n+1)!}{u_n^{n+1}}.\int_0^{u_n} e^t.\frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt = 0$ donc $\int_0^{u_n} e^t.\frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt = o_{n\to+\infty}(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!})$

Bilan : $\boxed{e^{u_n} = a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o_{n\to+\infty}(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!})}$

(c) Tout d'abord, nous savons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(a) > 0$. Donc $u_n \sim_{n\to+\infty} \ln(a)$. Par règles de calcul sur les équivalents,

$$\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \sim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (terme général d'une série exponentielle), par équivalence, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0}$

(d) Nous reprenons les idées développées au 6.(b).
Tout d'abord, d'après la relation précédente,

$$u_n = \ln(a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o_{n\to+\infty}(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!})) = \ln(a) + \ln(1 + \frac{1}{a}.(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o_{n\to+\infty}(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}))$$

D'où

$$u_n - \ln(a) = \ln(1 + \frac{1}{a}.(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o_{n\to+\infty}(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}))$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, par équivalence classique

$$u_n - \ln(a) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{a}.(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o_{n\to+\infty}(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!})$$

donc

$$u_n - \ln(a) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{a}.\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}$$

Et enfin, $u_n - \ln(a) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{a}.\frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$.

Bilan : $\boxed{u_n - \ln(a) \sim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a.(n+1)!}}$

Bilan sur cet exercice :

- *Cet exercice commence par des questions assez classiques sur une suite implicite (dont les termes sont définis comme des solutions d'équations).*
- *La fonction f_n est une somme partielle de série exponentielle.*
- *On utilise la formule de Taylor avec reste intégral pour calculer la somme de la série exponentielle moins la somme partielle (c'est aussi l'une des méthodes pour démontrer le résultat de cours sur la série exponentielle !!)*
- *On étudie le comportement en l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en affinant successivement : on montre d'abord que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(a)$ (4.(c)), puis que $u_n = \ln(a) + o(\frac{1}{n^2})$ (6.(b)) et enfin on trouve un équivalent de $u_n - \ln(a)$ (7.(d)).*