ECG2 - Lycée Saint Just
Mathématiques Approfondies 2024/25

Programme de colle - **Semaine 4**
du 7 au 11 octobre 2024

`Informatique : programmation en langage Python`

Révision des instructions sur les matrices : définition d'une matrice, matrices usuelles, opérations usuelles sur les matrices.
Calcul d'une somme ou d'un produit : par boucle `for` ou en utilisant les matrices du type `np.arange(1,n+1,1)` et les instructions `np.sum`, `np.prod`

Chapitre 2. Révisions d'algèbre linéaire (suite et fin)

- Application linéaire f, noyau et image de f, **théorème du rang**.
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, matrice $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) = Mat_{\mathcal{B}_F}(f(\mathcal{B}_E))$. Attention à l'ordre des bases.
- Relation $Mat_{\mathcal{B}_F}(f(u)) = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f).Mat_{\mathcal{B}_E}(u)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$,
$$Mat_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g).Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$$
- **Formules de changement de bases PAR COEUR**
$$X = P.X'$$
$$A' = P^{-1}.A.P$$
où $X = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, $X' = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$, $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
- Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice.
- **Polynôme annulateur**.
- Rang d'une matrice : définition, méthode de calcul.
- Rang d'un endomorphisme, lien avec le rang de la matrice.
- Noyau d'une matrice.
- **Matrices semblables** : définition. Deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.
- Deux matrices semblables ont le même rang.
- **Trace d'une matrice carrée** :
  1. Définition
  2. Tr est linéaire.
  3. $Tr(AB) = Tr(BA)$ (*) : **A SAVOIR DEMONTRER**, on est obligé de **revenir à la définition du produit matriciel**
  4. Deux matrices semblables ont la même trace (*)
- Sous-espace stable : définition.

Chapitre 3. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (tout)

I. Valeurs propres et vecteurs propres

1. Cas des matrices

- **Valeur propre d'une matrice, vecteur propre d'une matrice, spectre d'une matrice** : **DEFINITIONS A CONNAITRE**.
Sous-espace propre associé à la valeur propre λ :
$$E_\lambda(A) = Ker(A - \lambda.I)$$
- λ est valeur propre de A ssi $A - \lambda.I$ n'est pas inversible.
- $0 \in Spec(A)$ ssi A n'est pas inversible.
- Si A est une matrice triangulaire, $Spec(A) = \{$ coeff. diagonaux de $A\}$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda.X$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k.X = \lambda^k.X$ (*)
Pour tout polynôme Q, on obtient $Q(A).X = Q(\lambda).X$.
- Soit P un polynôme annulateur de A. Alors
$$Spec(A) \subset \{ \text{ racines de } P\}$$
- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède au plus n valeurs propres.

2. Cas des endomorphismes.

Soit E un e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- **Valeur propre d'un endomorphisme, vecteur propre d'un endomorphisme** ($u \in E$ **non nul** tel que...), **spectre d'un endomorphisme**.
Sous-espace propre associé à la valeur propre λ :
$$E_\lambda(f) = Ker(f - \lambda.Id_E)$$
- λ est valeur propre de f ssi $f - \lambda.Id_E$ n'est pas bijective.
- $0 \in Spec(f)$ ssi f n'est pas bijective.

- Si u_1, ..., u_p sont p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes λ_1, ..., λ_p, alors la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre (**PREUVE PAR RECURRENCE A SAVOIR REFAIRE** (*)).

- Les sous-espaces propres de f sont en somme directe.

- Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E.

- Pour tout endomorphisme f de E, si $Spec(f) \neq \emptyset$ alors :

$$Card(Spec(f)) \leq \sum_{\lambda \in Spec(f)} \dim(Ker(f - \lambda Id_E)) \leq \dim(E)$$

- Si $f(x) = \lambda x$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$.
  Si Q est un polynôme alors $Q(f)(x) = Q(\lambda).x$.

- Soit P un polynôme annulateur de f. Alors

$$Spec(f) \subset \{\text{racines de } \ P\}$$

II. Diagonalisation

1. Cas des endomorphismes

- f est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

- f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

- f est diagonalisable si et seulement si

$$E = \oplus_{\lambda \in Spec(f)} Ker(f - \lambda.Id)$$

- f est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in Spec(f)} \dim(Ker(f - \lambda Id_E) = \dim(E)$$

- **Condition suffisante de diagonalisabilité**
  Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim(E) = n$. **Si** f admet n valeurs propres distinctes **alors** f est diagonalisable et tout sous-espace propre de f est de dimension 1.

2. Cas des matrices

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si elle est semblable à une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(K)$, i.e. s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale.

- A est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{C}' = (U_1, \cdots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (respectivement associés aux valeurs propres λ_1, ..., λ_n). Dans ce cas, la matrice $P = (U_1|U_2 \ | \cdots |U_n)$ (obtenue en concaténant les colonnes U_1, ..., U_n) diagonalise A :

$$P^{-1}.A.P = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

- A est diagonalisable si et seulement si

$$\oplus_{\lambda \in Spec(A)} Ker(A - \lambda.I) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

- A est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in Spec(A)} \dim(Ker(A - \lambda.I)) = n$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Spec(A) \neq \emptyset$. Alors :

$$Card(Spec(A)) \leq \sum_{\lambda \in Spec(A)} \dim(Ker(A - \lambda I)) \leq n$$

- **condition suffisante de diagonalisabilité**
  Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **Si** A admet n valeurs propres distinctes **alors** A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

- **cas des matrices symétriques**
  Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

- 1. Deux matrices semblables A et B ont le même spectre. (*)
  2. Les matrices A et ${}^tA$ ont le même spectre. (*)

- **Exercice à savoir refaire**
  Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice admettant une unique valeur propre λ. A quelle condition A est-elle diagonalisable ?

3. Lien endomorphismes - matrices

Soit E un e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, f un endomorphisme de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

1. $Spec(f) = Spec(A)$
2. u est un vecteur propre de $f \Leftrightarrow X = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est un vecteur propre de A
3. f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ A est diagonalisable.
4. Si $\mathcal{B}' = (u_1, \cdots, u_n)$ est une base de vecteurs propres de f, alors $A = PDP^{-1}$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont associés aux vecteurs propres $u_1, \cdots, u_n$.
5. P est un polynôme annulateur de $f \Leftrightarrow P$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice à savoir refaire rapidement :

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de J, montrer que J est diagonalisable, déterminer des matrices inversible P et diagonale D telles que $J = P.D.P^{-1}$

.

(*) : **preuve exigible**