Chap. 2 - Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1

$\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^n)$

1. La famille $\mathcal{B}$ est formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, c'est donc une famille libre. De plus $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$$X^k = (X-1+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (X-1)^i \quad \text{(binôme)}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X^k) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \binom{k}{0} \\ \binom{k}{1} \\ \vdots \\ \binom{k}{k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ X-1 \\ \vdots \\ (X-1)^k \\ (X-1)^{k+1} \\ \vdots \\ (X-1)^n \end{array} \end{array}$$

3. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{C} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. $\forall k \in [\![0,n]\!]$,

$$(X-1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} X^i \quad \text{(binôme)}.$$

D'où :

$X-1 = -1 + X$

$(X-1)^2 = 1 - 2X + 1$

- $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$

$$= \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^k & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & & (-1)^{k-1}\binom{k}{1} & & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & (-1)\cdot\binom{k}{k-1} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & & & 0 & \ddots & (-1)\cdot\binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^k \\ \vdots \\ X^n \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} 1 & X-1 & (X-1)^2 & & (X-1)^k & & (X-1)^n \end{array} & \end{array}$$

- D'après le 2.,

$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$

$$= \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & & \binom{k}{1} & & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \binom{k}{k-1} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & & \binom{n}{n-1} \\ & & & & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ X-1 \\ (X-1)^2 \\ \vdots \\ (X-1)^k \\ \vdots \\ (X-1)^n \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} 1 & X & X^2 & & X^k & & X^n \end{array} & \end{array}$$

Exercice 2 : noyau et image. CLASSIQUE

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

(a) $\mathrm{Ker}(f) = E \iff \forall x \in E,\ f(x) = 0$

$\iff f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$: application nulle

$\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow f$ est injective (cours)

(b) • $\mathrm{Im}(f) = F \Leftrightarrow f$ est surjective (cours)

• $\mathrm{Im}(f) = \{0_F\} \Leftrightarrow f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$

$\Leftrightarrow f$ est l'application nulle

2. Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

* Montrons que $\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(g\circ f)$: $\exists x \in E / y = g\circ f(x)$.

Alors $y = g(f(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}(g)$.

D'où l'inclusion.

* Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g\circ f)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

Alors $f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = g(0) = 0$ car g linéaire

donc $x \in \mathrm{Ker}(g\circ f)$.

D'où l'inclusion.

3. On suppose que $g\circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$: $\exists x \in E / y = f(x)$.

Alors $g(y) = g(f(x)) = g\circ f(x) = 0_E$ car $g\circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$

donc $y \in \mathrm{Ker}(g)$.

D'où l'inclusion.

4. On suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f\circ f = 2f$.

Montrons que $\mathrm{Ker}(f - 2Id_E) = \mathrm{Im}(f)$ par double inclusion.

$\subset$: soit $x \in \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.

Alors $(f - 2Id_E)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2x = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 2x$

$\Leftrightarrow x = f(\frac{1}{2}x)$

donc $x \in \mathrm{Im}(f)$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f - 2Id_E) \subset \mathrm{Im}(f)$.

$\supset$: soit $x \in \mathrm{Im}(f)$: $\exists t \in E / x = f(t)$.

Alors

$$\begin{aligned}(f - 2Id_E)(x) &= f(x) - 2x \\ &= f\circ f(t) - 2f(t) \\ &= 2f(t) - 2f(t) \quad \text{car } f\circ f = 2f \\ &= 0 \quad \text{donc } x \in \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)\end{aligned}$$

D'où $\underline{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)}$

Conclusion : par double inclusion, on a bien montré que $\underline{\mathrm{Ker}(f-2Id_E) = \mathrm{Im}(f)}$

5. On suppose que $\dim(E) = 2n$, que $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $rg(f) = n$.

Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.

* Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$: $\exists t \in E / x = f(t)$.

Alors $f(x) = f^2(t) = 0_E$ car $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

D'où $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

* $\dim \mathrm{Im}(f) = rg(f) = n$.

D'après le <u>théorème du rang</u>,

$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim(E)$

$\Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}(f) + n = 2n \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}(f) = n$

Comme $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \\ \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f) \end{array}\right\}$ <u>une inclusion et l'égalité des dimensions</u>

on a bien $\underline{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)}$

<u>Exercice 3</u>

Les polynômes de Lagrange. CLASSIQUE

1. Si $n = 2$,

$P_0 = \dfrac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} (X - x_1)(X - x_2)$

$P_1 = \dfrac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} (X - x_0)(X - x_2)$

$P_2 = \dfrac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (X - x_0)(X - x_1)$

2. $\forall k \in [\![0 ; n]\!]$, $\deg(P_k) = n$

(car n monômes apparaissent dans le produit).

3. (a) Soit $k \in [\![0 ; n]\!]$ et $i \in [\![0 ; n]\!]$.

<u>1er cas</u> : si $i \neq k$, le monôme $(X - x_i)$ apparaît dans le produit et donc $P_k(x_i) = (x_i - x_i) \times \ldots = 0$

<u>2ème cas</u> : si $i = k$,

$$P_k(x_k) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{1}{x_k - x_j}(x_k - x_j) = 1$$

Ainsi $P_k(x_i) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{array}\right.$

(b) * Montrons que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \dots + \lambda_n P_n(x) = 0$.

D'après le 3.(a) :

- en évaluant en x_0, comme $P_0(x_0) = 1$ et $P_1(x_0) = \dots = P_n(x_0) = 0$, on obtient $\lambda_0 = 0$
- en évaluant en x_1, on obtient de même $\lambda_1 = 0$

etc...

- en évaluant en x_n, on obtient $\lambda_n = 0$.

Ainsi $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$: la famille est libre.

* De plus $\mathrm{Card}(P_0, P_1, \dots, P_n) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$

donc $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $R = Q - \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

(a) $\forall i \in [\![0, n]\!]$,

$$R(x_i) = Q(x_i) - \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) \underbrace{P_k(x_i)}_{\substack{=0 \text{ si } i \neq k \\ =1 \text{ si } i = k}}$$

D'où

$R(x_i) = Q(x_i) - Q(x_i) = 0$.

(b) $\deg(Q) \leq n$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) \leq n$

d'où $\deg(R) \leq n$.

De plus R admet $n+1$ racines distinctes $x_0, x_1, \dots, x_n$

donc $R = 0_{\mathbb{R}[X]}$: R est le polynôme nul.

(c) On en déduit que $Q = \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$

donc la matrice des coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(Q) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} Q(x_0) \\ Q(x_1) \\ \vdots \\ Q(x_n) \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{array}$$

5. Notons $\mathcal{E} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{E}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{E}) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & X & X^2 & \dots & X^n \end{array} & \end{array}$$

6. Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$

(a) Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\lambda P+Q) = ((\lambda P+Q)(x_0), \dots, (\lambda P+Q)(x_n))$

$= (\lambda P(x_0)+Q(x_0), \dots, \lambda P(x_n)+Q(x_n))$

$= \lambda(P(x_0),\dots,P(x_n)) + (Q(x_0),\dots,Q(x_n))$

$= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$

donc φ est linéaire et va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{n+1})$.

(b) * Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors

$\varphi(P) = 0 \iff P(x_0) = P(x_1) = \dots = P(x_n)$.

P est de degré $\leq n$ et admet $n+1$ racines distinctes, donc nécessairement $P = 0$.

D'où $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.

* Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$ et φ est injective, φ est bijective.

ou Th. du rang : $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = n+1$
et $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ d'où $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^{n+1}$
donc φ surjective.

Ainsi φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(c) Notons $\mathcal{D}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \dots & \varphi(X^n) \end{array} \end{array}$$

(d) $\varphi(P_0) = (1,0,\dots,0)$

$\varphi(P_1) = (0,1,0,\dots,0)$

etc...

$\varphi(P_n) = (0,0,\dots,0,1)$

d'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}$

on obtient la matrice unité !

Exercice 4

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 3y - 4z\}$

$= \{(3y-4z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{y\cdot(3,1,0) + z\cdot(-4,0,1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \mathrm{Vect}((3,1,0), (-4,0,1))$

F est donc un sev de $\mathbb{R}^3$.

La famille $\mathcal{B}_F = ((3,1,0),(-4,0,1))$ est génératrice de F.

Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires donc $\mathcal{B}_F$ est une base de F

et $\dim(F) = 2$.

* $G = \mathrm{Vect}((1,0,0))$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

La famille $\mathcal{B}_G = ((1,0,0))$ est génératrice de G et libre car formée d'un unique vecteur non nul.

Il s'agit donc d'une base de G et $\dim(G) = 1$

2. Pour montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant la base $\mathcal{B}_F$ de F et la base $\mathcal{B}_G$ de G est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\mathcal{B} = ((3,1,0),(-4,0,1),(1,0,0))$.

Notons $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en intervertissant les lignes}$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 + 4L_2$$

$$= 3$$

$\mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})) = 3$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Ainsi $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Autres méthodes :

- Montrer que $\mathcal{B}$ est libre + $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$
- Montrer que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ + $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Exercice 5

* $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,/\, c = a-b \text{ et } d = a-b\}$

$= \{(a,b,a-b,a-b) \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \mathrm{Vect}(u,v)$ où $u = (1,0,1,1)$

$v = (0,1,-1,-1)$

Donc F est un sev de $\mathbb{R}^4$.

La famille $\mathcal{B}_F = (u, v)$ est génératrice de F.

Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires.

C'est une base de F et $\dim F = 2$

* $G = \text{Vect}((1,1,1,1),(1,0,1,0))$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.

$\mathcal{B}_G = (w, t)$ où $w = (1,1,1,1)$, $t = (1,0,1,0)$

est génératrice de G. Elle est libre car [...]

$\dim(G) = 2$.

2. Pour montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$, il suffit de montrer que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w, t)$ obtenue en concaténant $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Notons $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$rg(B) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$rg(B) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix}$$

$= 4$

Donc B est inversible et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

D'où $F \oplus G = \mathbb{R}^4$

Exercice 6

1. Montrer que F est un sev de l'ev $\mathcal{A}p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (1) $F \subset \mathcal{A}p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(2) $0_{\mathcal{A}p(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in F$ car l'application nulle est paire

(3) $\forall (f, g) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x)$

$= \lambda f(x) + g(x)$

car f et g sont paires

Donc $\lambda f + g \in F$.

Ainsi F est un sev de $\mathcal{A}p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Même méthode : G sev de $\mathcal{A}p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2. Pour montrer que $E = F \oplus G$, nous allons montrer que $\forall f \in E,\ \exists (g,h) \in F \times G \,/\, f = g + h$.

Pour cela nous travaillons par analyse et synthèse.

Soit $f \in E$.

Analyse : supposons qu'il existe $g \in F$ et $h \in G$ telles que $f = g + h$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$ car g paire et h impaire

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

$h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Synthèse : avec les fonctions g et h ci-dessus :

* $g + h = f$
* g est paire car $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$
* h est impaire car $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$

Donc g et h conviennent.

Conclusion : $\forall f \in E,\ \exists ! (g,h) \in F \times G \,/\, f = g + h$

Donc $F \oplus G = E$

Rque : seule méthode car on travaille en dimension infinie.

Exercice 7 : matrices symétriques et antisymétriques.

1. $p = 2$

(a)

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La famille $\mathcal{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de F.

Montrons qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ donc la famille est libre.

$\mathcal{B}_F$ est une base de F et $\dim(F) = 3$.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} ;\ a \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) : G \text{ sev de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

La famille $\mathcal{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de G et libre (un seul vecteur non nul) donc c'est une base de G.

$\dim(G) = 1$

(b) * Soit $A \in F \cap G$.

Alors ${}^tA = A$ et ${}^tA = -A$ d'où $2A = 0$ et $A = 0$.

. Donc $F \cap G = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$

* De plus $\dim F + \dim G = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

D'après le cours $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 (a) * Montrons que F est un sev de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(1) $F \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. (2) $0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})} \in F$ car ${}^t0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$

(3) Soit $(A, B) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors ${}^t(\lambda A + B) = \lambda\, {}^tA + {}^tB = \lambda A + B$

donc $\lambda A + B \in F$.

Conclusion : F sev de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

* De même : G sev de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(b). On montre comme au 1.(b) que $F \cap G = \{0\}$.

. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On remarque que

$A = B + C$ où $B = \dfrac{A + {}^tA}{2}$ et $C = \dfrac{A - {}^tA}{2}$.

$B \in F$ car ${}^tB = \dfrac{{}^tA + {}^t{}^tA}{2} = \dfrac{{}^tA + A}{2} = B$

et ${}^tC = \dfrac{{}^tA - {}^t{}^tA}{2} = -\dfrac{A - {}^tA}{2} = -C$ donc $C \in G$.

D'où $E = F + G$. Ainsi $E = F \oplus G$.

Rque : au lieu de "deviner" une décomposition, on peut raisonner par analyse et synthèse comme dans l'Ex. 6.

Exercice 8

1. Facile.

2. Montrons que :

$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \quad \exists!\ ((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in F \times G \ /$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

en raisonnant par analyse et synthèse.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

Analyse : supposons qu'il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente).

Comme $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = c$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + c$.

En passant à la limite : $\ell = 0 + c \Rightarrow \ell = c$.

Et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \ell$.

Ainsi : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & v_n = u_n - \ell \\ \forall n \in \mathbb{N}, & w_n = \ell \end{cases}$ d'où l'unicité

de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Synthèse : soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} v_n = u_n - \ell \\ w_n = \ell \end{cases}$

Alors :
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell - \ell = 0$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$
- $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$.

Ainsi les deux suites existent.

Bilan : $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \exists ! \left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in F\times G \,/$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

donc $F \oplus G = E$.

Exercice 9 : Polynôme

1.

* $\forall P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$, $P(-X) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

f va bien de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

* Montrons que f est linéaire.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_{2n}[X])^2$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda P + Q - (\lambda P + Q)(-X)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda P + Q - \lambda P(-X) - Q(-X)\right) \\ &= \lambda\left(\tfrac{1}{2}P - P(-X)\right) + \tfrac{1}{2}\left(Q - Q(-X)\right) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \text{ donc } f \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$

* Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$

2. $f(1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$ $\quad f(X) = \frac{1}{2}(X - (-X)) = X$

$f(X^2) = \frac{1}{2}(X^2 - X^2) = 0$ $\quad f(X^3) = \frac{1}{2}(X^3 - (-X)^3) = X^3$

etc... $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$

$$f(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ X^k & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$$

Notons $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}_{2n}[X]$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \; 0 \\ 0 & & & & & 0 \; 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(0,1,0,1,\dots,0,1,0)$$

3. * $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), \dots, f(X^{2n}))$
$= \mathrm{Vect}(X, X^3, X^5, \dots, X^{2n-1})$

D'où $\underline{\dim \mathrm{Im}(f) = n}$ et $(X, X^3, \dots, X^{2n-1})$ base de $\mathrm{Im}(f)$ (libre car non nuls de degrés 2 à 2 distincts).

* D'après le Th. du rang,

$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}_{2n}[X] = 2n+1$

d'où $\underline{\dim \mathrm{Ker}(f) = n+1}$.

La famille $(1, X^2, X^4, \dots, X^{2n})$ est libre, incluse dans $\mathrm{Ker}(f)$ d'après les calculs précédents, et de cardinal $n+1$. Il s'agit donc d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$

$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1, X^2, X^4, \dots, X^{2n})$.

Rque : $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des polynômes impairs de degré $\leq 2n$, et $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des polynômes pairs de degré $\leq 2n$.

4. $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc f n'est pas bijectif.

5. $\forall P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$,

+ Rapide ! : $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

$f \circ f(P) = f\left(\frac{1}{2}(P - P(-X))\right)$

$= \frac{1}{2} f(P) - \frac{1}{2} f(P(-X))$ par linéarité

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(P - P(-X))\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(P(-X) - P(X))\right)$

$= \frac{1}{4}P(X) - \frac{1}{4}P(-X) - \frac{1}{4}P(-X) + \frac{1}{4}P(X)$

$= \frac{1}{2}P(X) - \frac{1}{2}P(-X)$

$= f(P)$

Ainsi $f \circ f = f$: $\underline{f \text{ est un projecteur.}}$

6.
* D'après le Th. du rang,

$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}_{2n}[X]$.

* Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

• L'inclusion $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ est évidente (ce sont des sev).

- Soit $P \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Il existe $Q \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que $P = f(Q)$.

De plus $f(P) = 0$ donc $f^2(Q) = 0 \Leftrightarrow f(Q) = 0$ car $f^2 = f$. Donc $P = 0$. D'où l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Conclusion : $\begin{cases} \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}_{2n}[X] \\ \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \end{cases}$

donc $\underline{\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{2n}[X]}$

Exercice 10

* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{matrix}$

$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$\underline{\mathrm{rg}(A) = 2}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$X \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -y + z = 2z \\ y = -z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$

Donc $\underline{\mathrm{Ker}(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} = \underline{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre (vecteur non nul) et génératrice de $\mathrm{Ker}(A)$: c'est une base de $\mathrm{Ker}(A)$

* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$

$= 1$

D'où $\dim \mathrm{Ker}(B) = 2$.

On remarque que $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B)$

et $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B)$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires.

Ex. 10 (suite)

Comme $\mathrm{Card}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)=2=\dim \mathrm{Ker}(B)$,

la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(B)$

* $\Pi=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

$rg(\Pi)=rg\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ $L_3\leftarrow L_3-L_1$

$=3$

Donc Π est inversible et $\mathrm{Ker}(\Pi)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

* $H=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&2\\1&2&2\end{pmatrix}$ $\quad rg(H)=rg\begin{pmatrix}1&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=1$

D'où $\dim \mathrm{Ker}(H)=2$.

On remarque que $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(H)$. La famille $\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est libre car formée de <u>deux</u> vecteurs non colinéaires.

Comme $\mathrm{Card}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right)=2=\dim \mathrm{Ker}(H)$,

$\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(H)$.

Exercice 11

1. On note $\mathcal{B}'=(u_1,u_2,u_3)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\Pi=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&0&1\\-2&-1&3\end{pmatrix}$.

$rg(\Pi)=rg\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\begin{array}{l}L_2\leftarrow 2L_2+L_1\\L_3\leftarrow L_3+L_1\end{array}$

$=rg\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=3$

Π est inversible, donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Rque: d'autres méthodes sont possibles, par exemple famille libre + $\mathrm{Card}=3=\dim\mathbb{R}^3$.

2. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=\Pi$

3. Il s'agit d'abord d'inverser $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$$Y=\Pi X \iff \begin{cases}2x+y-2z=a\\-x+z=b\\-2x-y+3z=c\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}2x+y-2z=a & L_1\\ y=a+2b & L_2\leftarrow 2L_2+L_1\\ z=a+c & L_3\leftarrow L_3+L_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b + c \\ y = a + 2b \\ z = a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \times A \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Rque : nous avons diagonalisé A !

Exercice 12

1. La famille $\mathcal{B} = ((1,2),(1,1))$ est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires.
$\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
De même $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2.

* $f((1,2)) = (1-2, 1+2) = (-1,3)$
$= 4\cdot(1,2) + (-5)\cdot(1,1)$

$f((1,1)) = (0,2) = 2\cdot(1,2) + (-2)\cdot(1,1)$

D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1,2) \\ (1,1) \end{array} \\ \begin{array}{cc} f((1,2)) & f((1,1)) \end{array} & \end{array}$$

* $f((1,1)) = (0,2) = 1\cdot(1,1) + (-1)\cdot(1,-1)$

$f((1,-1)) = (2,0) = 1\cdot(1,1) + 1\cdot(1,-1)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,-1) \end{array} \\ \begin{array}{cc} f((1,1)) & f((1,-1)) \end{array} & \end{array}$$

3. $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

Or $(1,1) = 0.(1,2) + 1.(1,1)$

$(1,-1) = -2.(1,2) + 3.(1,1)$

$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1,2) \\ (1,1) \end{array} \\ \begin{array}{cc} (1,1) & (1,-1) \end{array} & \end{array}$$

4. $\det(P) = 0\times 3 - (-2)\times 1 = 2 \neq 0$

donc P inversible.

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rapel : si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det(A) = ad - bc$.

A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Si c'est le cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

5. $N = P^{-1}.M.P$: cf cours sur le changement de bases

Vérification Scilab ok

Exercice 13

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

On remarque que

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I_3$$

d'où $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$.

le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ est annulateur de A.

2. On a donc $A^2 - 3A = -2I_3$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}A^2 + \frac{3}{2}A = I_3 \Leftrightarrow A.\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3\right) = I_3$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le th de la division euclidienne pour les polynômes, il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$X^n = (X^2-3X+2)Q + R \quad \text{avec } \deg(R) \leq 1.$$

Notons $R = aX+b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$X^n = (X^2-3X+2)Q + aX+b$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x^n = (x^2-3x+2)Q(x) + ax+b \quad (*)$$

On remarque que $x^2-3x+2=0$
$\iff x=1$ ou $x=2$

• Si $x=1$, $(*)$ donne :

$$1 = 0 \times Q(1) + a+b \Rightarrow \underline{a+b=1}$$

• Si $x=2$, $(*)$ donne :

$$2^n = 0 \times Q(2) + 2a+b \Rightarrow \underline{2a+b=2^n}$$

Ainsi

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2^n \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=1 \\ a=2^n-1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2^n-1 \\ b=-2^n+2 \end{cases}$$

Donc le reste est

$$R = (2^n-1)X + (-2^n+2)$$

4. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \underbrace{(A^2-3A+2I_3)}_{=0} \cdot Q(A) + R(A)$$

$$\iff \underline{A^n = (2^n-1)A + (-2^n+2)I_3}$$

Vérification : si $n=0$: $(2^0-1)A + (-2^0+2)I_3 = I_3 = A^0$
si $n=1$: $(2-1)A + (-2+2)I_3 = A = A^1$
si $n=2$: $3A - 2I_3 = A^2$

$\boxed{\text{Exercice 14}}$

$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) = M + {}^tM$

1. • $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ${}^tM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $f(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
f va bien de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Soit $(M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda M+N) &= (\lambda M+N) + {}^t(\lambda M+N) \\ &= \lambda M + N + \lambda\, {}^tM + {}^tN \quad \text{par linéarité de la transposition} \\ &= \lambda f(M) + f(N) \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

2. Soit $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

où $E_{11} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

$E_{22} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22})\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

On montre facilement que la famille $\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right)$ est libre :

$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$,

$$\alpha\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc $\underline{\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = 3}$.

3. D'après le th. du rang,

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Ker}(f) &= \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Im}(f) \\
&= 4 - 3 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Soit $A = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Alors

$$f(A) = A + {}^tA = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

donc $A \in \mathrm{Ker}(f)$. La famille (A) est libre (car $A \neq 0$) et $\mathrm{Card}(A) = 1 = \dim \mathrm{Ker}(f)$ donc $\underline{(A) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f)}$.

4. Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Nous savons que la famille $\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et que $\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Ces deux sev sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ssi la famille

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$.

$$\alpha\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha=0\\ \beta+\delta=0\\ 2\gamma=0\\ \beta-\delta=0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on a bien

$\underline{\mathrm{Ker}(f)\oplus \mathrm{Im}(f)=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

5. $\forall M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} f\circ f(M) &= f(M+{}^tM)\\ &= f(M)+f({}^tM) \text{ par linéarité de } f\\ &= M+{}^tM+{}^tM+{}^t({}^tM)\\ &= 2(M+{}^tM)\\ &= 2f(M)\end{aligned}$$

Ainsi $f^2=2f \Leftrightarrow f^2-2f=0$.

<u>le polynôme X^2-2X est bien un polynôme annulateur de f.</u>

6. <u>Montrons que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(f-2Id)$</u>

On procède par double inclusion.

$\subset$: Soit $N\in \mathrm{Im}(f)$: $\exists M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, N=f(M)$.

Alors
$$\begin{aligned}(f-2Id)(N) &= (f-2Id)(f(M))\\ &= f^2(M)-2f(M)\\ &= 0 \text{ d'après le 5.}\end{aligned}$$

donc $N\in \mathrm{Ker}(f-2Id)$.

D'où l'inclusion <u>$\mathrm{Im}(f)\subset \mathrm{Ker}(f-2Id)$</u>.

$\supset$: Soit $M\in \mathrm{Ker}(f-2Id)$. Alors

$$f(M)-2M=0 \Leftrightarrow M=\tfrac{1}{2}f(M)$$
$$\Leftrightarrow M=f\left(\tfrac{1}{2}M\right) \text{ par linéarité.}$$

Donc $M\in \mathrm{Im}(f)$. D'où l'inclusion <u>$\mathrm{Ker}(f-2Id)\subset \mathrm{Im}(f)$</u>

<u>Conclusion</u> : $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(f-2Id)$

7. On a donc <u>$\mathrm{Ker}(f)\oplus \mathrm{Ker}(f-2Id)=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$</u>

Il existe une base $\mathcal{B}'=(N_1,N_2,N_3,N_4)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que (N_1) soit une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et (N_2,N_3,N_4) soit une base de $\mathrm{Ker}(f-2Id)$.

D'où
$f(N_1)=0 \qquad f(N_3)=2N_3$
$f(N_2)=2N_2 \qquad f(N_4)=2N_4$

Ex. 14 (fin)

On a donc

$$\begin{array}{c} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} \\ \quad\quad\quad f(N_1)\ f(N_2)\ f(N_3)\ f(N_4) \end{array}$$

Exercice 15

1. $rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$

$= 2$

Donc $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ et $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$.

* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$

$= \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3, e_1+e_3, e_1+3e_2+e_3)$

$= \mathrm{Vect}(e_1+e_3, e_2, 3e_2)$

$= \mathrm{Vect}(e_1+e_3, e_2)$.

$\mathrm{Im}(f)$ a pour base (e_1+e_3, e_2).

(Famille génératrice de cardinal 2)

* Soit $x \in E$, $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

$x \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta + 2\gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta - \gamma = -3\gamma \\ \beta = 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow x = -3\gamma e_1 + 2\gamma e_2 + \gamma e_3$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{-3\gamma e_1 + 2\gamma e_2 + \gamma e_3 \,/\, \gamma \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}(-3e_1 + 2e_2 + e_3)$

La famille $(-3e_1+2e_2+e_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$rg(B) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 3$

donc B est inversible et $\mathcal{B}'$ est une base de E.

(b) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculons son inverse.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$Y = PX \iff \begin{cases} x + y + 3z = a \\ x \quad -2z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 3z = a \\ \quad -y - 5z = b - a \\ \quad\quad -4z = c - a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a - y - 3z = a + \frac{1}{4}a + b - \frac{5}{4}c - \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}c \\ y = +a + b - 5z = -\frac{1}{4}a - b + \frac{5}{4}c \\ z = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}a + b - \frac{1}{2}c \\ y = -\frac{1}{4}a - b + \frac{5}{4}c \\ z = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}c \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/4 & -1 & 5/4 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} Y$$

Donc

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/4 & -1 & 5/4 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Puis

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1/2 \\ -1/4 & -1 & 5/4 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) On remarque que $f(e_1') = 4e_1' - e_2'$
$f(e_2') = 4e_1' - 2e_2'$

donc par linéarité $\underline{H = \mathrm{Vect}(e_1', e_2') \text{ est stable par } f}$.

Notons $\mathcal{B}'' = (e_1', e_2')$ base de H.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(f|_H) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 16

1. $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, P = (X-1)^2(X+1)^2 Q$ où $\deg(Q) \leq n-4\}$

$= \left\{ (X-1)^2(X+1)^2 \times \sum_{k=0}^{n-4} a_k X^k \,/\, (a_0, a_1, \dots, a_{n-4}) \in \mathbb{R}^{n-3} \right\}$

$= \left\{ \sum_{k=0}^{n-4} a_k (X-1)^2(X+1)^2 X^k \,/\, (a_0, \dots, a_{n-4}) \in \mathbb{R}^{n-3} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left((X-1)^2(X+1)^2, (X-1)^2(X+1)^2 X, \dots, (X-1)^2(X+1)^2 X^{n-4}\right)$

Donc <u>G est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$.</u>

La famille $\mathcal{B}_G = \left((X-1)^2(X+1)^2 X^k\right)_{k \in [\![0, n-4]\!]}$ est génératrice de G et libre puisque formée de polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts.

C'est une <u>base de G et $\dim(G) = \mathrm{Card}(\mathcal{B}_G) = n-3$</u>

2. $*$ $\dim G + \dim \mathbb{R}_3[X] = n-4+3$
$= n+1$
$= \dim \mathbb{R}_n[X]$

$*$ Soit $P \in G \cap \mathbb{R}_3[X]$.

Alors : $\begin{cases} P = (X-1)^2(X+1)^2 Q \\ \deg P \leq 3 \end{cases}$.

Seule possibilité :
$P = 0_{\mathbb{R}[X]}$!

Donc $G \cap \mathbb{R}_3[X] = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

$*$ Ainsi <u>$G \oplus \mathbb{R}_3[X] = \mathbb{R}_n[X]$</u> : G et $\mathbb{R}_3[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

3. (a) Soit $k \in [\![0; n]\!]$. D'après le Th. de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$X^k = \underbrace{(X-1)^2(X+1)^2 Q}_{\in G} + \underbrace{R}_{\in \mathbb{R}_3[X]}$ où $R \in \mathbb{R}_3[X]$.

D'où $p(X^k) = R$.

Calculons ce reste !

$X^k = (X-1)^2(X+1)^2 Q + aX^3 + bX^2 + cX + d$ ($*$)

$\hookrightarrow kX^{k-1} = 2(X-1)(X+1)^2 Q + 2(X-1)^2(X+1)Q + (X-1)^2(X+1)^2 Q'$
$+ 3aX^2 + 2bX + c$ ($**$)

Evaluons ($*$) en 1 et en -1 :

$\begin{cases} a+b+c+d = 1 \\ -a+b-c+d = (-1)^k \end{cases}$

Evaluons ($**$) en 1 et en -1 :

$\begin{cases} 3a+2b+c = k \\ 3a-2b+c = k(-1)^{k-1} \end{cases}$

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 & L_1 \\ -a+b-c+d=(-1)^k & L_2 \\ 3a+2b+c=k & L_3 \\ 3a-2b+c=k(-1)^{k-1} \end{cases}$$

la résolution de ce système est particulièrement pénible...

On obtient en définitive

$$\begin{cases} a=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^k+\frac{1}{4}k+\frac{1}{4}k(-1)^{k-1}=a_k \\ b=\frac{1}{4}k-\frac{1}{4}k(-1)^{k-1}=b_k \\ c=-\frac{1}{4}k-\frac{1}{4}k(-1)^{k-1}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}(-1)^k=c_k \\ d=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{1}{4}k+\frac{1}{4}k(-1)^{k-1}=d_k \end{cases}$$

Ainsi : $f(X^k)=a_kX^3+b_kX^2+c_kX+d_k$

avec les valeurs de a, b, c, d trouvées ci-dessus.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ d_0 & d_1 & \cdots & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17

1. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

Calculons le rang de A :

$$rg(A) = rg \begin{pmatrix} n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 \; 1 \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{n-1} L_1$$

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 \; 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_1 \end{matrix}$$

Cette dernière matrice est inversible (car triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux non nuls), elle est donc <u>de rang n</u>.

D'où $rg(A) = n$ et <u>A est inversible</u>.

2. $P = P_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) = A$

On remarque que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \cdots & n-2 \\ n-2 & n-1 & n-2 \cdots & n-2 \\ \vdots & & \ddots & n-2 \\ n-2 & n-2 & \cdots n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = (n-1) I_n + (n-2) A$$

D'où $A^2 - (n-2)A = (n-1) I_n$

$\iff A\left(A - (n-2) I_n\right) = (n-1) I_n$

$\iff A\left(\frac{1}{n-1} A - \frac{n-2}{n-1} I_n\right) = I_n$

Donc $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{n-1} A - \frac{n-2}{n-1} I_n}$

<u>Rque</u> : on peut aussi calculer A^{-1} en résolvant le système $AX = Y$, mais cela est plus long...

Exercice 18

1. * Par définition la famille $\mathcal{B}_k$ est génératrice de E_k.

* Montrons qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tels que

$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_k f_k = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\lambda_0 e^x + \lambda_1 x e^x + \dots + \lambda_k x^k e^x = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_k x^k = 0$ car $e^x \neq 0$.

Ceci signifie que la fonction polynômiale

$x \mapsto \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_k x^k$ est identiquement nulle.
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Un polynôme est nul ssi ses coefficients sont nuls,

donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Ainsi $\mathcal{B}_k$ est libre.

* Donc $\mathcal{B}_k$ est une base de E_k.

2.

* Montrons que Φ est linéaire.

$\forall (f,g) \in (E_3)^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$\Phi(\alpha f + g) = (\alpha f + g)''' - 2(\alpha f + g)'' + (\alpha f + g)'$

$= \alpha(f''' - 2f'' + f') + g''' - 2g'' + g'$

$= \alpha \Phi(f) + \Phi(g)$

Donc Φ est linéaire.

* $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\Phi(f_0)(x) = f_0^{(3)}(x) - 2f_0^{(2)}(x) + f_0'(x)$

$= e^x - 2e^x + e^x$

$= 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$f_1(x) = x e^x$ donc $f_1'(x) = (x+1)e^x$

$f_1''(x) = (x+2)e^x$

$f_1^{(3)}(x) = (x+3)e^x$

D'où $\Phi(f_1)(x) = (x+3)e^x - 2(x+2)e^x + (x+1)e^x$

$= 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$f_2(x) = x^2 e^x$ donc $f_2'(x) = (2x + x^2)e^x$

$f_2''(x) = (2 + 2x + 2x + x^2)e^x$

$= (2 + 4x + x^2)e^x$

$f_2^{(3)}(x) = (4 + 2x + 2 + 4x + x^2)e^x$

$= (6 + 6x + x^2)e^x$

D'où

$\Phi(f_2)(x) = (2x + x^2)e^x - 2(2 + 4x + x^2)e^x + (6 + 6x + x^2)e^x$

$= 2e^x = 2f_0(x) \in E_3$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$f_3(x) = x^3 e^x$ donc $f_3'(x) = (3x^2 + x^3)e^x$

$f_3''(x) = (6x + 6x^2 + x^3)e^x$

$f_3^{(3)}(x) = (6 + 18x + 9x^2 + x^3)e^x$

D'où

$$\Phi(f_3)(x) = (6+18x+9x^2+x^3)e^x - 2(6x+6x^2+x^3)e^x + (3x^2+x^3)e^x$$
$$= (6+6x)e^x$$
$$= 6f_0(x)+6f_1(x) \in E_3.$$

* Soit $f \in E_3$: $f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$ où $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$. Alors par linéarité de Φ,

$$\Phi(f) = a_0\Phi(f_0) + a_1\Phi(f_1) + a_2\Phi(f_2) + a_3\Phi(f_3) \in E_3$$

Ainsi Φ est un endomorphisme de E_3.

3. D'après les calculs précédents :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(\Phi) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \Phi(f_0) & \Phi(f_1) & \Phi(f_2) & \Phi(f_3) \end{matrix} & \end{array}$$

Exercice 19

1. * Soit $(P,Q) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\Delta(\alpha P+Q) = (\alpha P+Q)(X+1) - (\alpha P+Q)(X)$$
$$= \alpha\,(P(X+1)-P(X)) + (Q(X+1)-Q(X))$$
$$= \alpha\Delta(P) + \Delta(Q)$$

Donc Δ est linéaire.

* $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(P(X+1)) = \deg(P)$

donc $\deg(\Delta(P)) = \deg(P(X+1)-P(X)) \leq n$

et $\Delta(P) \in E$.

* Ainsi $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.

2. (a) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1)-P(x)=0$.

Par récurrence facile, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)=P(0)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)-P(0)=0$.

Le polynôme $Q=P-P(0)$ admet donc une infinité de racines (tous les $n \in \mathbb{N}$).

Donc ce polynôme est nul et $P=P(0)$: P est un polynôme constant.

(b) D'après le (a), $Ker(\Delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$.

De plus si $P \in \mathbb{R}_0[X]$, $P = a \in \mathbb{R}$ et

$\Delta(P) = a - a = 0$ donc $\mathbb{R}_0[X] \subset Ker(\Delta)$.

Bilan : $\underline{Ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X] = \{\text{polynômes constants}\}}$

(c) $Ker(\Delta) \neq \{0\}$ donc $\underline{\Delta \text{ n'est pas bijectif}}$.

3. (a)

- $\Delta(1) = 0$
- $\forall k \in [\![1;n]\!]$,

$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k \quad \text{(binôme)}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$$

(b) Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de E.

$$Mat_{\mathcal{C}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & & \binom{k}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{k}{k-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$Im(\Delta) = Vect(\Delta(1), \Delta(X), \dots, \Delta(X^n))$$

$$= Vect(0, 1, 1+2X, \dots, 1+\dots+kX^{k-1}, \dots, 1+\dots+nX^{n-1})$$

$$= Vect(1, X, \dots, X^{k-1}, \dots, X^{n-1})$$

$$= \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

4. $Ker(\Delta) \cap Im(\Delta) = \mathbb{R}$

donc $\underline{Ker(\Delta) \text{ et } Im(\Delta) \text{ ne sont pas supplémentaires}}$ $\underline{\text{dans } E}$.

5. (a) Classique !

(b)
- $\Delta(P_0) = 0$
- Si $k \in [\![1;n]\!]$,

$$\Delta(P_k) = P_k(X+1) - P_k(X)$$

$$= \frac{1}{k!}(X+1)X(X-1)\dots(X-k+2) - \frac{1}{k!}X(X-1)\dots(X-k+1)$$

$$= \frac{1}{k!}X(X-1)\dots(X-k+2)\big(X+1-(X-k+1)\big)$$

$$= \frac{k}{k!}X(X-1)\dots(X-k+2) = \frac{1}{(k-1)!}X(X-1)\dots(X-k+2)$$

donc $\underline{\Delta(P_k) = P_{k-1}}$

Ex-19 (fin)

Notons $\mathcal{B} = (P_k)_{0 \le k \le n}$

Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 20

1. * Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$\alpha x + \beta u(x) + \gamma u^2(x) + \delta u^3(x) = 0$. (1)

En appliquant u, par linéarité :

$\alpha u(x) + \beta u^2(x) + \gamma u^3(x) + \underbrace{\delta u^4(x)}_{=0} = 0$ (2)

Puis en continuant :

$\alpha u^2(x) + \beta u^3(x) + \cancel{\gamma u^4(x)} = 0$ (3)

et

$\alpha u^3(x) = 0$ (4).

Comme $u^3(x) \neq 0$, $\alpha = 0$. En remontant dans (3) : $\beta = 0$, dans (2) : $\gamma = 0$ et dans (1) : $\delta = 0$.

Ainsi $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$: la famille $\mathcal{B}$ est libre.

* $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 4 = \dim E$ donc $\mathcal{B}$ est une base de E

2.

$g(x) = x + u(x) + u^2(x) + u^3(x)$

$g(u(x)) = u(x) + u^2(x) + u^3(x)$ car $u^4(x) = 0$

$g(u^2(x)) = u^2(x) + u^3(x)$

$g(u^3(x)) = u^3(x)$

D'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est triangulaire inférieure avec des coeff. diagonaux non nuls, donc inversible.

Ainsi g est un automorphisme de E.

3. $g \circ (Id_E - u) = g \circ Id_E - g \circ u$

$= Id_E + u + u^2 + u^3 - (u + u^2 + u^3 + u^4)$

$= Id_E$ car $u^4 = 0$.

De même $(Id_E - u) \circ g = Id_E$.

Donc $g^{-1} = Id_E - u$

Exercice 21

1. Idem Ex-20 1)

2. Il suffit de prendre $x \in E$ tel que $f^{p}(x) \neq 0_E$ et on reprend le raisonnement du 20. 1)

(b) Soit $y \in \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^p(x))$.

Alors

$y = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_p f^p(x)$ où $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$

D'où

$$f(y) = \underbrace{\alpha_0 f(x) + \alpha_1 f^2(x) + \dots + \alpha_{p-1} f^p(x)}_{\in \text{Vect}(x, \dots, f^p(x))} + \underbrace{0}_{f^{p+1}=0}$$

Donc l'e.v. $\text{Vect}(x, \dots, f^p(x))$ est stable par f.

(c) Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que

$$\lambda_0 Id_E + \lambda_1 f + \dots + \lambda_p f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

En calculant cette fonction pour le x du (a) :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_p f^p(x) = 0_E.$$

Comme la famille $(x, f(x), \dots, f^p(x))$ est libre,

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Donc la famille $(Id_E, f, \dots, f^p)$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

3. On suppose que $\dim(E) = n$ et $f^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Supposons $f^n \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. D'après le 2. : il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^n(x))$ est libre.

Or cette famille est de cardinal $n+1 > \dim(E)$: absurde !

Donc $\underline{f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

<u>Exercice 22</u>

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et F un sev de $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$: Supposons F stable par f. Montrons que F est stable par $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^n}$.

Soit $u \in F$.

$$(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^n})(u) = \underbrace{f(u)}_{\in F} - \underbrace{\lambda u}_{\in F} \in F$$

Donc F est bien stable par $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^n}$.

$\Leftarrow$: si F est stable par $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^n}$, alors comme précédemment F sera stable par

$$(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^n}) + \lambda Id_{\mathbb{R}^n} = f \dots$$

Ainsi : $\boxed{F \text{ stable par } f \Leftrightarrow F \text{ stable par } f - \lambda Id}$

2. <u>Si</u> F est stable par f <u>alors</u> F est stable par f^2.

Car $f^2(x) = f(f(x))$.

Ex-22- (suite)

3.(a) Comme $Vect(e_p)$ stable par f : $\exists \alpha \in \mathbb{R} \,/\, f(e_p) = \alpha e_p$

$Vect(e_q)$ ——— : $\exists \beta \in \mathbb{R} \,/\, f(e_q) = \beta e_q$

$Vect(e_p+e_q)$ ——— : $\exists \gamma \in \mathbb{R} \,/\, f(e_p+e_q) = \gamma(e_p+e_q)$

Finalement :

$$f(e_p+e_q) = f(e_p) + f(e_q) \iff \gamma(e_p+e_q) = \alpha e_p + \beta e_q$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \gamma \end{cases} \text{ car } (e_p, e_q) \text{ libre}$$

Donc il existe bien λ tel que $f(e_p) = \lambda e_p$

$f(e_q) = \lambda e_q$.

(b) Si f laisse stable toutes les droites vectorielles :

$\forall (p,q) \in [\![1;n]\!]^2$, $Vect(e_p)$, $Vect(e_q)$, $Vect(e_p+e_q)$ sont stables par f.

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \forall p \in [\![1;n]\!]$, $f(e_p) = \lambda e_p$.

On en déduit que $f = \lambda Id_{\mathbb{R}^n}$: $\boxed{f \text{ est une homothétie}}$

Exercice 23

1.

(a) Soit $x \in Ker(f^p)$. Alors $f^p(x) = 0_E$. D'où

$f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0_E) = 0_E$ et $x \in Ker(f^{p+1})$.

D'où l'inclusion $\underline{Ker(f^p) \subset Ker(f^{p+1})}$

(b) Soit $y \in Im(f^{p+1})$; $\exists x \in E \,/\, y = f^{p+1}(x)$.

Alors $y = f^p(f(x)) \in Im(f^p)$.

D'où l'inclusion $\underline{Im(f^{p+1}) \subset Im(f^p)}$

2. (a)

$\Rightarrow$: Supposons que $Ker(f) = Ker(f^2)$.

Montrons que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$.

- L'inclusion $\{0_E\} \subset Ker(f) \cap Im(f)$ est évidente.
- Soit $y \in Ker(f) \cap Im(f)$: $\exists x \in E \,/\, y = f(x)$.

De plus $f(y) = 0_E \iff f^2(x) = 0_E$.

Comme $Ker(f^2) = Ker(f)$, on a aussi $f(x) = 0_E$

donc $y = 0_E$. D'où $Ker(f) \cap Im(f) \subset \{0_E\}$.

Par double inclusion $\underline{Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}}$.

$\Leftarrow$: Supposons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.
Montrons qu'alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

$\subseteq$: cette inclusion est vraie d'après le 1.(a) avec $p=1$

$\supseteq$: soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Alors

$$f^2(x) = 0_E \iff f(f(x)) = 0_E$$

Ainsi $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ d'où $f(x) = 0_E$ par hypothèse.
Donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$.
Finalement $\underline{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)}$.

Conclusion : $\underline{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}}$

(b) Supposons E de dimension finie.
D'après le Th. du rang,

$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim E.$$

Donc dans ce cas

$$\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\} \iff \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E.$$

D'où

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E}$$

3. $\underline{\text{Montrons que } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E.}$

$\Rightarrow$: Supposons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
Montrons que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$:

- L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \subset E$ est évidente.
- Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$:
  $\exists y \in E / f(x) = f^2(y)$.
  D'où $f(x - f(y)) = 0_E$.
  Ainsi $x = \underbrace{x - f(y)}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{f(y)}_{\in \mathrm{Im}(f)} \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$

$\Leftarrow$: Supposons que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$.
Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

$\supset$: $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$: vrai d'après le 1.b. avec $p=1$.

$\subset$: Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors $\exists x \in E / y = f(x)$.
Comme $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$: $\exists (z, t) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f) /$
$x = z + t = z + f(s)$ où $s \in E$.
Alors $y = f(x) = \underbrace{f(z)}_{=0} + f^2(s) = f^2(s) \in \mathrm{Im}(f^2)$.
Ainsi $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.

Ex. 23 (fin)

. D'où $Im(f) = Im(f^2)$

Conclusion : $\underline{Im(f) = Im(f^2) \Longleftrightarrow Ker(f) + Im(f) = E}$

Exercice 24

1. Montrons que :

$\forall x \in E,\ \exists !\ (y, z, t) \in Ker(f) \times Ker(f - Id_E) \times Ker(f - 2Id_E) /$

$x = y + z + t.$

Soit $x \in E$.

Analyse : supposons l'existence de ces vecteurs y, z et t :

$x = y + z + t.$

Alors $f(x) = z + 2t$ car $f(y) = 0$, $f(z) - z = 0$,

puis $f^2(x) = z + 4t$ $\qquad f(t) - 2t = 0.$

D'où :

$$\begin{cases} y + z + t = x \\ z + 2t = f(x) \\ z + 4t = f^2(x) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} f^2(x) - \frac{3}{2} f(x) + x \\ z = -f^2(x) + 2f(x) \\ t = \frac{1}{2}(f^2(x) - f(x)) \end{cases}$$

D'où l'unicité.

Synthèse : considérons y, z, t définis par les formules ci-dessus.

* $y + z + t = x$ (facile)

* $f(y) = \frac{1}{2} f^3(x) - \frac{3}{2} f^2(x) + f(x)$

$= \frac{1}{2}(f^3 - 3f^2 + 2f)(x) = 0_E$ par hypothèse

donc $y \in Ker(f)$

* $f(z) = -f^3(x) + 2f^2(x)$

$= -3f^2(x) + 2f(x) + 2f^2(x)$

$= -f^2(x) + 2f(x)$

$= z$ $\qquad$ donc $z \in Ker(f - Id_E)$

* $f(t) = \frac{1}{2}(f^3(x) - f^2(x))$

$= \frac{1}{2}(3f^2(x) - 2f(x)) = f^2(x) - f(x)$

$= 2t$ $\qquad$ donc $t \in Ker(f - 2Id_E)$

D'où l'existence.

Bilan : on a bien

$\underline{Ker(f) \oplus Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f - 2Id_E) = E}$

2. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\operatorname{Ker}(f)$

$\mathcal{B}_2$ une base de $\operatorname{Ker}(f-Id_E)$

$\mathcal{B}_3$ ———— $\operatorname{Ker}(f-2Id_E)$.

D'après le 1, la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ est une base de E.

Dans cette base,

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Diag}(0,\dots,0,1,\dots,1,2,\dots,2)$$

3.

(a) Classique ... libre (à montrer) + cardinal 3.

(b) $1 = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$

$\iff 1 = \alpha(X-1)(X-2) + \beta X(X-2) + \gamma X(X-1)$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha = 1 & \text{: on évalue en } 0 \\ -\beta = 1 & \text{: on évalue en } 1 \\ 2\gamma = 1 & \text{: on évalue en } 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -1 \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où

$$1 = \frac{1}{2}P_0 - P_1 + \frac{1}{2}P_2$$

(c) * Si $j=0$,

$$f(P_0(f)(x)) = f((f-Id)\circ(f-2Id)(x))$$
$$= (f^3 - 3f^2 + 2f)(x)$$
$$= 0 \quad \text{donc } P_0(f)(x) \in \operatorname{Ker}(f)$$

* De même $P_1(f)(x) \in \operatorname{Ker}(f-Id_E)$

$P_2(f)(x) \in \operatorname{Ker}(f-2Id_E)$.

* D'après le (b) :

$$Id_E = \frac{1}{2}P_0\circ f - P_1\circ f + \frac{1}{2}P_2\circ f$$

d'où $\forall x \in E$,

$$x = \frac{1}{2}P_0(f)(x) - P_1(f)(x) + \frac{1}{2}P_2(f(x))$$

donc $x \in \sum_{j=0}^{2} \operatorname{Ker}(f - j\,Id_E)$

(d) * Soit $(y,z,t) \in \operatorname{Ker}(f)\times\operatorname{Ker}(f-Id_E)\times\operatorname{Ker}(f-2Id_E)$ /

$y+z+t = 0_E$. Alors : $f(z)+f(t) = 0 \iff z+2t=0$

Puis : $f(z)+f(2t) = 0 \iff z+4t=0$. D'où

$$\begin{cases} y+z+t=0 \\ z+2t=0 \\ z+4t= \end{cases} \iff y=z=t=0.$$ Avec le (c) on a

bien enfin : $\boxed{\operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Ker}(f-Id_E)\oplus\operatorname{Ker}(f-2Id_E) = E}$