Devoir d'entraînement - algèbre linéaire et réduction

Problèmes : matrices compagnons et endomorphismes cycliques

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension n, et de base $\mathcal{C} = (e_1, e_2 \cdots, e_n)$.
Soit f un endomorphisme de E et deux polynômes $R \in \mathbb{R}[X]$ et $S \in \mathbb{R}[X]$,
avec $R = \sum_{k=0}^{m} r_k.X^k$.

Rappels :

- $R(f)$ est l'endomorphisme de E où $R(f) = r_m.f^m + r_{m-1}.f^{m-1} + \cdots + r_1.f + r_0.Id_E$.
- $(R.S)(f) = R(f) \circ S(f) = S(f) \circ R(f)$.

Définition 1 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est **cyclique** si et seulement si :
il existe un vecteur u de E tel que la famille $\mathcal{B} = (u, f(u), \cdots, f^{n-1}(u))$ soit une base de E.

Définition 2 : Soit $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $T \in \mathbb{R}_n[X]$, où
$T = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.
On associe à ce polynôme la matrice C dite matrice compagnon de T, où :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

I. Un cas particulier

On considère ici $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $T = X^3 + X^2 - 2X$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$F = Mat_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est la matrice compagnon de T.

1. Vérifier que f est cyclique et que T est un polynôme annulateur de f.
2. (a) Déterminer les valeurs propres de f et justifier que f est diagonalisable.
   (b) Déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}.F.P = D$ soit diagonale. Préciser D.

3. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ g = f$.
   Soit u un vecteur propre de f associé à λ la plus petite des valeurs propres de f.
   Justifier qu'il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha.u$. Exprimer alors λ en fonction de α.
   Que peut-on en conclure ?

II. Un deuxième cas particulier

Ici $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, de base canonique $\mathcal{C} = (1, X, \cdots, X^{n-1})$.
Soit f l'application définie sur E par : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $f(P) = P'$.

4. Vérifier que f est un endomorphisme de E et que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   f est-il diagonalisable ? Déterminer $Im(f)$ et $Ker(f)$.
5. (a) Soit $U = X^{n-1}$. Vérifier que $\mathcal{B} = (U, f(U), \cdots, f^{n-1}(U))$ est une base de E.
   f est donc cyclique.
   (b) Vérifier que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice compagnon C associée à un certain polynôme T.
   Ecrire un script en Scilab qui demande n, qui construit et affiche la matrice C.

III. Cas général

Ici $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$.
Soit $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $T \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$T = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

On note C la matrice compagnon de T et f l'endomorphisme de E de matrice C dans la base canonique.

6. Exprimer, pour tout $i \in [[1, n-1]]$, $f(e_i)$ et $f^i(e_1)$ en fonction de e_{i+1}.
   Préciser $f^n(e_1)$.
   Vérifier que f est cyclique.
7. On note g l'endomorphisme $g = T(f) = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1f + a_0Id_E$.
   (a) Vérifier que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.
   (b) Vérifier que $g(e_1) = 0_E$ et justifier alors que pour tout $i \in [[1, n]]$, $g(e_i) = 0_E$.
   (c) Montrer que le polynôme T est annulateur de f.
   (d) Ecrire un script en Scilab permettant de construire une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{k=0}^{n} k.A^k = 0$.
8. (a) Soit λ une racine du polynôme T.
   Il existe donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ où $Q = b_{n-1}.X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$ tel que

   $$T = (X - \lambda).Q \quad \text{et on a } T(f) = (f - \lambda.Id_E) \circ Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

   En calculant $Q(f)(e_1)$, justifier que $Q(f) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. En déduire que λ est une valeur propre de f.
   (b) Justifier que les valeurs propres de la matrice C sont les racines de T.

9. (a) Soit λ une valeur propre de C. Justifier que la matrice $C - \lambda.I_n$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$.
En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.

(b) En déduire que C est diagonalisable si et seulement si T admet n racines deux à deux distinctes.

10. On suppose ici que T admet $\underline{n \text{ racines deux à deux distinctes } \lambda_1, ..., \lambda_n \text{ qui sont les valeurs propres de } C}$.
On note $B = {}^tC$ la matrice transposée de C.

(a) Démontrer que B et C ont le même spectre.

(b) Soit λ une valeur propre de B. On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Justifier que $Ker(B - \lambda.I_n) \subset Vect(U)$ puis que $Ker(B - \lambda.I_n) = Vect(U)$.

(c) On note

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Justifier alors que V est inversible (ne pas calculer V^{-1}) et donner en le justifiant la matrice $D = V^{-1}.B.V$

11. <u>Application à un cas particulier :</u> ici $T = (X-1)\cdots(X-n) = \prod_{k=1}^{n}(X-k)$.
Ecrire un script qui détermine et affiche la matrice V associée à T et la matrice C.

12. <u>Une réciproque :</u> soit h un endomorphisme de E admettant n valeurs propres 2 à 2 distinctes λ_1, ..., λ_n.
h est donc diagonalisable et il existe une base $\mathcal{C}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ de E telle que pour tout $k \in [[1, n]]$, $h(e'_k) = \lambda_k.e'_k$.
Soit $u = e'_1 + e'_2 + \cdots + e'_n$. A l'aide de la matrice V (ou de sa transposée...), justifier que $\mathcal{B} = (u, h(u), \cdots, h^{n-1}(u))$ est une base de E.
h est donc cyclique.