DEVOIR D'ENTRAINEMENT

- ALGEBRE LINÉAIRE & RÉDUCTION

I. Un cas particulier

1. * Soit $u=(1,0,0)$ et $U=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(u))=FU=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u)=(0,1,0)$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f^2(u))=F^2U=F.FU=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $f^2(u)=(0,0,1)$.

Ainsi $(u,f(u),f^2(u))=\mathcal{C}$: la famille $(u,f(u),f^2(u))$ est une base de $E=\mathbb{R}^3$ (c'est même la base canonique!) et

<u>f est un endomorphisme cyclique de E.</u>

* $F^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-2\\1&-1&3\end{pmatrix}$ et $F^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-2&6\\-1&3&-5\end{pmatrix}$

donc

$T(F)=F^3+F^2-2F$

$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-2\\1&-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-2&6\\-1&3&-5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

d'où $T(f)=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$: <u>T est annulateur de f.</u>

2. (a) * D'après le cours,

$$\mathrm{Sp}(f)\subset\{\text{racines de } T\}$$

Or $X^3+X^2-2X=X(X^2+X-2)$ a pour racines 0, 1 et -2.

$$\mathrm{Sp}(f)\subset\{0,1,-2\}$$

* Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$u\in\mathrm{Ker}(f)\iff f(u)=0$

$\iff\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x+2z=0\\y-z=0\end{cases}$

$\iff\begin{cases}x=-2z\\y=z\end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right)\neq 0$ et <u>$0\in\mathrm{Sp}(f)$</u>.

* $u\in\mathrm{Ker}(f-Id)\iff(f-Id)(u)=0$

$\iff\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\iff\begin{cases}-x=0\\x-y+2z=0\\y-2z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=0\\y=2z\end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(f-Id)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right)\neq 0$ et <u>$1\in\mathrm{Sp}(f)$</u>

* $u \in \mathrm{Ker}(f+2Id) \Leftrightarrow (f+2Id)(u)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2&0&0\\ 1&2&2\\ 0&1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=-z \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f+2Id)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 1 \end{pmatrix}\right)\neq 0$ et $-2\in \mathrm{Spec}(f)$

Conclusion: * $\mathrm{Spec}(f)=\{0,1,-2\}$

* $\sum_{\lambda\in \mathrm{Spec}(f)} \dim \mathrm{Ker}(f-\lambda Id)=3=\dim \mathbb{R}^3$

donc f est diagonalisable.

(b) $P=\begin{pmatrix} -2&0&0\\ 1&2&-1\\ 1&1&1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&-2 \end{pmatrix}$

sont telles que $P^{-1}.F.P=D$

3. Soit ~~u~~ un vecteur propre de f associé à $\lambda=-2$.

Alors $f\circ g(u)=g\circ g\circ g(u)=g\circ f(u)=-2g(u)$

D'où $f(g(u))=-2g(u)$: $g(u)\in \mathrm{Ker}(f+2Id)$

donc comme $\mathrm{Ker}(f+2Id)=\mathrm{Vect}(u)$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $g(u)=\alpha u$.

On a alors $g^2(u)=\alpha^2 u$ d'où $g^2(u)=f(u)$

$\Leftrightarrow \alpha^2 u=-2u$

$\Leftrightarrow \alpha^2=-2$ car $u\neq 0$

Absurde! Car $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ainsi il n'existe pas de $g\in\mathcal{L}(E)$ tel que $g\circ g=f$.

II. Un deuxième cas particulier :

4.

* $\forall (P,Q)\in E^2, \forall\lambda\in\mathbb{R}$,

$f(\lambda P+Q)=(\lambda P+Q)'=\lambda P'+Q'=\lambda f(P)+f(Q)$

donc f est linéaire.

* $\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\deg(P)\leq n-1$ donc $\deg(P')\leq n-2$

et ainsi $f(P)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$: f va bien de E dans E.

* Donc $f\in\mathcal{L}(E)$: f est un endomorphisme de E.

* $\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $f^{n-1}(P)=P^{(n-1)}\in\mathbb{R}_0[X]$: polynôme constant, donc $f^n(P)=0$. Ainsi $f^n=0_{\mathcal{L}(E)}$.

* le polynôme $P = X^n$ est donc annulateur de f.

D'après le cours, $Spec(f) \subset \{\text{Racines de } P\}$

donc $Spec(f) \subset \{0\}$

* Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$f(P) = 0 \iff P' = 0$

$\iff P$ est constant

Donc $Ker(f) = \mathbb{R}$
$= \mathbb{R}_0[X]$
$= \{\text{polynômes constants}\}$.

$Ker(f) = Vect(1)$ et $\dim Ker(f) = 1$.

Ainsi $\sum_{\lambda \in Spec(f)} \dim Ker(f - \lambda Id) = 1 \neq n$

donc f n'est pas diagonalisable

* $Im(f) = Vect(f(1), f(X), f(X^2), \ldots, f(X^{n-1}))$

$= Vect(0, 1, 2X, 3X^2, \ldots, (n-1)X^{n-2})$

$= Vect(1, X, X^2, \ldots, X^{n-2})$

$Im(f) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$

5. (a) Soit $U = X^{n-1}$.

$\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $f^{(k)}(U) = U^{(k)}$ donc

$\deg(f^{(k)}(U)) = n-1-k \geq 0$.

La famille $\mathcal{B} = (U, f(U), \ldots, f^{n-1}(U))$ est donc une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, elle est donc libre.

De plus $Card(\mathcal{B}) = n = \dim E$, donc $\mathcal{B}$ est une base de E.

Finalement : f est un endomorphisme cyclique de E.

(b)

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} f(U) & f^2(U) & f^{(k)}(U) & \cdots & f^n(U) \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} U \\ f(U) \\ f^2(U) \\ \vdots \\ f^{n-1}(U) \end{matrix}$$

Il s'agit de la matrice compagnon associée au polynôme $T = X^n$.

Script :

```
n=input("Entrer n:")
L=zeroes(1,n)
B=eye(n-1,n)
C=[L;B]
disp(C)
```

III. Cas général

$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots 0 & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \\ f(e_1)\ \cdots\ f(e_{n-1})\ f(e_n) \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$$

6. * D'après la matrice C, $\forall i \in [\![1;n-1]\!]$, $f(e_i) = e_{i+1}$.

Ainsi $f^i(e_1) = f^{i-1}(e_2) = f^{i-2}(e_3) = \dots = f(e_i) = e_{i+1}$

* Toujours d'après C,

$$f^n(e_1) = f(e_n) = -a_0 \cdot e_1 - a_1 \cdot e_2 - \dots - a_{n-1} \cdot e_n$$

* On considère $u = e_1$. Alors

$$\mathcal{B} = (u, f(u), f^2(u), \dots, f^{n-1}(u)) = (e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathcal{E}$$

d'après les calculs précédents : $\mathcal{B}$ est bien une base de E, donc f est cyclique.

7. $\forall i \in \mathbb{N}$,

(a)

$$g \circ f^i = (f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0 Id_E) \circ f^i$$
$$= f^{n+i} + a_{n-1} f^{n-1+i} + \dots + a_1 f^{i+1} + a_0 f^i$$

et

$$f^i \circ g = f^i \circ (f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0 Id_E)$$
$$= f^{n+i} + a_{n-1} f^{n-1+i} + \dots + a_1 f^{i+1} + a_0 f^i$$

Donc $g \circ f^i = f^i \circ g$

(b)

* $g(e_1) = f^n(e_1) + a_{n-1} f^{n-1}(e_1) + \dots + a_1 f(e_1) + a_0 e_1$

$$= -a_0 e_1 - a_1 e_2 - \dots - a_{n-1} e_n + a_{n-1} e_n + \dots + a_1 e_2 + a_0 e_1$$
$$= 0_E$$

* $\forall i \in [\![2;n]\!]$,

$$g(e_i) = g(f^{i-1}(e_1))$$
$$= g \circ f^{i-1}(e_1) = f^{i-1} \circ g(e_1) \text{ d'après le (a)}$$
$$= 0_E.$$

(c) $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $g(e_i) = 0_E$.

g s'annule en tout vecteur de la base canonique donc

$g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $T(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$: T est annulateur de f.

(d) On considère ici le polynôme

$$Q = nX^n + (n-1)X^{n-1} + \dots + X + 0$$

$$= n.\left(X^n + \frac{n-1}{n}X^{n-1} + \dots + \frac{1}{n}X + \frac{0}{n}\right)$$

On considère le polynôme $T = X^n + \frac{n-1}{n}X^{n-1} + \dots + \frac{2}{n}X + \frac{1}{n}$

de matrice compagnon associée

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -1/n \\ 0 & 1 & \ddots & & -2/n \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\, 0 & 1 & -\frac{n-1}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans la base $\mathcal{E}$.

On sait d'après (c) que le polynôme T est annulateur de f, donc de A.

Alors $Q(A) = n.T(A) = n.0 = 0$

et la matrice A convient.

Script :

```
n=input('Entrer n')
L = zeros(1,n)
I = eye(n-1,n-1)
C = (-[0:n-1]./n)'
A = [L; [I,C]]
disp(A)
```

← Transposée pour avoir une colonne

~ ou boucle

Un intérêt des matrices compagnons : étant donné T unitaire, construire une matrice A telle que $T(A) = 0$.

8. (a)

* $Q(f)(e_1) = b_{n-1} f^{n-1}(e_1) + \dots + b_1 f(e_1) + b_0 e_1$

$= b_{n-1} e_n + \dots + b_1 e_2 + b_0 e_1$

Supposons que $Q(f)(e_1) = 0_E$.

Comme $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre, on a alors

$b_{n-1} = \dots = b_1 = b_0 = 0$ donc $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Ceci implique que $T = 0_{\mathbb{R}[X]}$: absurde car $\deg(T) = n \geq 2$.

* Ainsi $Q(f)(e_1) \neq 0_E$ donc $Q(f) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

* Il existe donc $u \in E$ tel que $Q(f)(u) \neq 0_E$.

Alors $(f - \lambda Id_E) \circ Q(f)(u) = 0_E \iff (f - \lambda Id_E)(Q(f)(u)) = 0_E$

Ainsi $Q(f)(u) \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)$ donc $\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \neq \{0_E\}$

ce qui montre que <u>λ est une valeur propre de f</u>.

(b) Le polynôme T est annulateur de C (d'après 7.(c))

donc $\mathrm{Spec}(C) \subset \{\text{racines de } T\}$.

D'après le 8.(a), <u>si</u> λ est une racine de T

<u>alors</u> λ est valeur propre de f, donc de C.

Ainsi $\{\text{racines de } T\} \subset \mathrm{Spec}(C)$.

Par double inclusion $\boxed{\mathrm{Spec}(C) = \{\text{racines de } T\}}$

9.(a) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(C)$.

$$* \; C-\lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}(C-\lambda I_n) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 & * \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 \text{ puis} \\ L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_3 \text{ puis} \ldots \\ \\ L_n \leftarrow L_n \end{matrix}$$

Donc $\mathrm{rg}(C-\lambda I_n) \geq n-1$ car les $n-1$ premières colonnes sont linéairement indépendantes.

* De plus $\lambda \in \mathrm{Spec}(C)$ donc $\dim \mathrm{Ker}(C-\lambda I_n) \geq 1$

$\mathrm{rg}(C-\lambda I_n) \leq n-1$ (Th. du rang)

* Ainsi $\mathrm{rg}(C-\lambda I_n) = n-1$

donc <u>$\dim \mathrm{Ker}(C-\lambda I_n) = 1$</u> (Th. du rang).

<u>tous les sous-espaces propres de C sont de dimension 1</u>.

(b) * Si T admet n racines 2 à 2 distinctes

alors C admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

Comme $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, C est diagonalisable.

* Si T admet au plus $n-1$ racines distinctes

alors $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(C)} \dim \mathrm{Ker}(C-\lambda I_n) = \mathrm{Card}(\mathrm{Spec}(C))$

$\leq n-1$

$< n$

donc C n'est pas diagonalisable.

<u>Bilan</u> : $\boxed{C \text{ diagonalisable} \iff T \text{ admet } n \text{ racines 2 à 2 distinctes.}}$

10.

(a) Cours : soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \notin \mathrm{Spec}(B) \iff B - \lambda I \text{ inversible}$$
$$\iff {}^t(B - \lambda I) \text{ inversible}$$
$$\iff {}^tB - \lambda I \text{ inversible}$$
$$\iff \lambda \notin \mathrm{Spec}({}^tB)$$

Par la contraposée : $\lambda \in \mathrm{Spec}(B) \iff \lambda \in \mathrm{Spec}({}^tB)$.

Ainsi $\mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Spec}(C)$.

(b) Soit λ une vp de B (donc une racine de T !).

$$B - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$X \in \mathrm{Ker}(B - \lambda I_n) \iff (B - \lambda I_n)X = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & & -a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ -\lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \vdots \\ -\lambda x_{n-1} + x_n = 0 \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots + (a_{n-1} - \lambda) x_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - (a_{n-1} + \lambda) x_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_k = \lambda^{k-1} x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ * \end{cases} \quad \text{donc } X = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

et ainsi $\mathrm{Ker}(B - \lambda I_n) \subset \mathrm{Vect}(U)$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$.

Comme $U \neq 0$, $\dim \mathrm{Vect}(U) = 1$.

De plus $\lambda \in \mathrm{Spec}(B)$ donc $\dim \mathrm{Ker}(B - \lambda I_n) \geq 1$.

D'où l'égalité $\mathrm{Ker}(B - \lambda I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

(c). Notons $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ \vdots \\ \lambda_k^n \end{pmatrix}$.

D'après le (b), U_k est un vecteur propre associé à λ_k.

la famille $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ est alors une famille libre de vecteurs colonnes puisqu'il s'agit d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 $\neq$.

De plus le cardinal de cette famille vaut n : il s'agit d'une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$

de cette base (dans la base canonique des matrices colonnes) est inversible.

Comme il s'agit d'une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de B :

$$V^{-1} . B . V = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$$

11. T a pour racines $1, 2, \dots, n$.

Une fois T définie, on sait que

$$B = V D V^{-1} = V . \mathrm{Diag}(1, \dots, n) . V^{-1}$$

puis $C = {}^tB$.

Script :

```
n=input('Entrer n')
L=ones(1,n)
R= 1:n
V= [L;R]
for k=3:n-1
    V= [V;(1:n).^(k)]
end          <- disp(V)
D= diag(1:n)     <- crée la matrice D
B= V*D*V^(-1)
C = B'     <- on transpose
disp(C)
```

on rajoute une ligne à chaque fois

Autre méthode pour remplir V : double boucle for

12. Une réciproque

- $h(u) = h(e_1') + h(e_2') + \dots + h(e_n')$
$$= \lambda_1 e_1' + \lambda_2 e_2' + \dots + \lambda_n e_n'$$

et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$h^k(u) = \lambda_1^k e_1' + \lambda_2^k e_2' + \dots + \lambda_n^k e_n'$$

Notons $\mathcal{B} = (u, h(u), \dots, h^{n-1}(u))$.

La matrice de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ est donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = W = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = {}^tV$$

où V est la matrice du 10. (c)

Comme V est inversible (*), ${}^tV$ l'est aussi.

Donc $\mathcal{B}$ est une base de E et

h est un endomorphisme cyclique.

((*) Valable pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts).

Bilan global :

* Tout endomorphisme cyclique f possède une matrice du type matrice C et un polynôme annulateur du type T.
* Cet endomorphisme cyclique f est diagonalisable ⟺ T admet n racines deux à deux distinctes.
  Si c'est le cas, on sait diagonaliser C via $B = VDV^{-1} \Rightarrow C = ({}^tV)^{-1} \cdot D \cdot {}^tV$
* Si h admet n valeurs propres deux à deux distinctes alors h est cyclique.

FIN