Corrigé du DS n° 1

Exercice 1 - Ecricome

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. (a) On rappelle que les DL à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$ sont :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n}.\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln(1+\frac{1}{n}) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}) = 0$, d'après les DL précédents on a

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})$$

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})$$

D'où en réinjectant :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n}.(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})) - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2}) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

On en déduit enfin que $\boxed{w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}}$

(c) La série de terme général $\frac{1}{2}.\frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Par critère d'équivalence pour les séries à termes négatifs, $\boxed{\text{la série de terme général } (w_{n+1} - w_n) \text{ converge}}$.
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n}(w_{k+1} - w_k)$ la somme partielle de cette série. D'après ce qui précède, il existe un réel l tel que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty}(w_{k+1} - w_k) = l$$

Or

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) = w_n - w_1 \qquad \text{par télescopage}$$

D'où en passant à la limite, $\lim_{n\to+\infty} w_n - w_1 = l$, donc $\lim_{n\to+\infty} w_n = l + w_1$.
$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ converge vers un réel } \gamma}$
Ce réel est appelé **la constante d'Euler**

2. La fonction φ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables. Pour tout $t \in]0;+\infty[$,

$$\varphi'(t) = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

$\varphi'(t)$ est donc du signe de $1 - \ln(t)$, d'où le tableau de variations suivant :

t	0		e		$+\infty$
$\varphi'(t)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

En ce qui concerne les limites : $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ par croissance comparées.
$\lim_{t\to 0^+} \ln(t) = -\infty$ donc par quotient de limites, $\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t)}{t} = -\infty$.

3. (a)
- Pour tout $n \geq 2$,

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = \varphi(2n+2) - \varphi(2n+1)$$

D'après la question précédente, la fonction φ est décroissante sur $[e,+\infty[$. Comme $2n+2 \geq e$ et $2n+1 \geq e$ on a donc $\varphi(2n+2) - \varphi(2n+1) \leq 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (S_{2n})_{n\geq 2} \text{ est décroissante.}}$ (1)

- Pour tout $n \geq 2$,

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} = -\varphi(2n+3) - \varphi(2n+2) \geq 0$$

pour les mêmes raisons que précédemment. $\boxed{\text{La suite } (S_{2n+1})_{n\geq 2} \text{ est croissante.}}$ (2)

- Pour tout $n \geq 2$,

$$S_{2n+2} - S_{2n+1} = \varphi(2n+2) \to_{n\to+\infty} 0 \quad (3)$$

d'après la limite en $+\infty$ de φ.

- <u>Bilan :</u> d'après (1), (2), (3), $\boxed{\text{les suites } (S_{2n})_{n\geq 2} \text{ et } (S_{2n+1})_{n\geq 2} \text{ sont adjacentes}}$

(b) Etant adjacentes, les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite l.
Comme $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = l$ et $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = l$, d'après le cours sur les suites $\lim_{n\to+\infty} S_n = l$.

$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ est donc convergente}}$

$\boxed{\text{Cette série n'est pas absolument convergente}}$
En effet, pour tout $n \geq 2$, $|u_n| = \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$.
Comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), par critère de comparaison la série de terme général $|u_n|$ est divergente.

4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.

(a) Soit $n \geq 3$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, la fonction φ étant décroissante sur $[e;+\infty[$, on a $\varphi(n+1) \leq \varphi(t)$. En intégrant (bornes bon sens : $n < n+1$), on obtient :

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

(b) On peut calculer l'intégrale précédente :

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt = [\frac{(\ln(t))^2}{2}]_n^{n+1} = \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln(n))^2}{2}$$

d'où pour tout $k \geq 3$:

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln(n))^2}{2}$$

D'une part, pour tout $n \geq 3$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{(\ln(n+1))^2}{2} + \frac{(\ln(n))^2}{2} \leq 0$$

d'après l'inégalité précédente. $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\geq 3} \text{ est donc décroissante.}}$

Il va falloir faire preuve d'un peu d'initiative...

D'autre part, en raisonnant comme dans la question précédente : pour tout $k \geq 3$, pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $\varphi(t) \leq \varphi(k)$. En intégrant (bornes bon sens), on obtient tous calculs faits que

$$\frac{(\ln(k+1))^2}{2} - \frac{(\ln(k))^2}{2} \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

En sommant pour k variant de 3 à $n-1$ (où $n \geq 4$) :

$$\begin{aligned}
&\frac{(\ln(n))^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2} \leq \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k} \\
\Leftrightarrow\quad &\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{(\ln(n))^2}{2} \geq \frac{\ln(n)}{n} - \frac{(\ln(3))^2}{2} \\
\Leftrightarrow\quad &v_n \geq \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(n)}{n} - \frac{(\ln(3))^2}{2} \\
\Rightarrow\quad &v_n \geq -\frac{(\ln(3))^2}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\geq 3} \text{ est donc minorée}}$

$\boxed{\text{Etant décroissante et minorée, la suite } (v_n)_{n\geq 3} \text{ est convergente}}$

5. *On voit venir les sommes de termes pairs / impairs...*
   Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i} \frac{\ln(2i)}{2i} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{2i+1} \frac{\ln(2i+1)}{2i+1} \quad \text{en séparant les termes d'indice pair/impair} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2i)}{2i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln(2i+1)}{(2i+1)} \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2i)}{2i} - (\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2i)}{2i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln(2i+1)}{(2i+1)}) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \quad \text{en regroupant les termes d'indices pairs/impairs}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2) + \ln(k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \ln(2).\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \ln(2).\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n + \frac{(\ln(n))^2}{2} - v_{2n} - \frac{(\ln(2n))^2}{2} \quad \text{par définition de } \ v_n \\
&= \ln(2).\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{(\ln(n))^2 - (\ln(2) + \ln(n))^2}{2} \\
&= \ln(2).\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \ln(2).\ln(n) - \frac{(\ln(2))^2}{2} \quad \text{en simplifiant}
\end{aligned}$$

6. On a donc

$$S_{2n} = \ln(2).[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)] + (v_n - v_{2n}) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

   En passant à la limite dans $n \to +\infty$, on a : $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n.\frac{\ln(n)}{n}$ puisque cette série est convergente, $\lim_{n\to+\infty} v_n - v_{2n} = l - l = 0$ puisque la suite (v_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma$ d'après le 1.
   On a donc bien :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}}$$

Exercice 2 - intégrales et séries

1. **Etude de la suite** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   (a) Pour tout $t \in [0, 1]$, $t^2 \leq t$ donc $1 + t^2 \leq 1 + t$.
   De plus, $(t-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2t \leq 1 + t^2$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$t^n \leq (\frac{1+t^2}{2})^n \leq \frac{1}{2^n}(1+t)^n$$

   D'où en intégrant avec les bornes dans le bon sens (0<1) :

$$\int_0^1 t^n dt \leq a_n \leq \frac{1}{2^n} \int_0^1 (1+t)^n dt$$

   Or $\int_0^1 t^n dt = [\frac{t^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, et

$$\int_0^1 (1+t)^n dt = [\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

   donc

$$\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1} - \frac{1}{2^n(n+1)}$$

   d'où $\boxed{\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}}$

   (c) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, par encadrement $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

   (d) $a_0 = \int_0^1 1 dt = 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^{n+1} dt$.
   Posons

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = (\frac{1+t^2}{2})^{n+1} \\ v'(t) = 1 \end{array}\right. \quad \to \quad \left\{\begin{array}{l} u'(t) = (n+1).t.(\frac{1+t^2}{2})^n \\ v(t) = t \end{array}\right.$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= [t.(\frac{1+t^2}{2})^{n+1}]_0^1 - (n+1)\int_0^1 t^2.(\frac{1+t^2}{2})^n dt \\
&= 1 - 2(n+1)\int_0^1 \frac{1+t^2-1}{2}.(\frac{1+t^2}{2})^n dt \\
&= 1 - 2(n+1)\int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^{n+1} + (n+1)\int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n \ dt \\
&= 1 - 2(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n
\end{aligned}$$

   D'où $\boxed{(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n}$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2n+3} + \frac{n+1}{2n+3} a_n$. Donc aussi pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{n}{2n+1} a_{n-1}$.
D'où le programme suivant :

```
def a(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=1/(2*k+1)+k/(2*k+1)*u
    y=u
```

2. **Etude de l'absolue convergence de la série**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1} \Rightarrow \frac{|x|^n}{n+1} \leq a_n |x|^n \leq \frac{2|x|^n}{n+1}$$

- Si $|x| \geq 1$ alors on obtient $\frac{1}{n+1} \leq \frac{|x|^n}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq a_n|x|^n$.
Comme la série de t.g. $\frac{1}{n+1}$ diverge (série harmonique), par critère de comparaison (séries à termes positifs), la série de t.g. $|a_n x^n| = a_n.|x|^n$ diverge.
- Si $|x| < 1$, alors la série de terme général $\frac{2|x|^n}{n+1}$ converge. En effet, $\frac{2|x|^n}{n+1} = o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})$ par croissances comparées. Comme la série de t.g. $\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par critère de comparaison (séries à termes positifs), la série de t.g. $a_n|x|^n$ converge.
- **Bilan :** $\boxed{\text{la série de terme général } u_n(x) \text{ est absolument convergente si et seulement si } |x| < 1}$

3. **Somme de la série pour $-1 \leq x < 1$.**

(a) *Question pas si facile !! Si quelqu'un a trouvé plus efficace, je suis preneur !*
Soit $x \in [-1, 1[$ un réel fixé.
On remarque que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - xt^2 \geq 0$$

Considérons la fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi : t \quad \mapsto \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - xt^2$$

La fonction φ est dérivable sur $[0, 1]$ et sa dérivée vaut $\varphi'(t) = -2xt$, du signe de $-x$.

- **1er cas :** si $x \geq 0$ alors

t	0		1
$\varphi'(t)$		$-$	
$\varphi(t)$	$\frac{1+x}{2}$	$\searrow$	$\frac{1-x}{2}$

Ainsi pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) \geq \frac{1-x}{2}$. Comme $x < 1$, $1 - x > 0$ et donc $\varphi(t) \geq 0$.
- **2ème cas :** si $x < 0$ alors

t	0		1
$\varphi'(t)$		$+$	
$\varphi(t)$	$\frac{1+x}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1-x}{2}$

Donc pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) \geq \frac{1+x}{2} \geq 0$ car $x \geq -1$.
- Finalement, dans les deux cas : $\forall t \in [0, 1]$, $\varphi(t) \geq 0$, ce qui montre que

$$\boxed{\forall t \in [0, 1],\ 2 - x - xt^2 \geq \tfrac{3}{2}(1-x) > 0}$$

La deuxième inégalité étant évidente puisque $x < 1$.

(b) D'après ce qui précède, pour tout $t \in [0, 1]$, $2 - x - xt^2 > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{2}{2-x-xt^2}$ est donc définie et continue sur $[0, 1]$ en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle. Par conséquent l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2 - x - xt^2}\, dt$ est bien définie.

(c) Soit n un entier naturel.

i. *Laissons nous "porter" par les calculs...*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^k dt.x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (\frac{x+xt^2}{2})^k\ dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (\frac{x+xt^2}{2})^k\ dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{1 - (\frac{x+xt^2}{2})^{n+1}}{1 - (\frac{x+xt^2}{2})}\ dt \quad \text{car} \quad \frac{x+xt^2}{2} \neq 1 \quad \text{(d'après le 3.a !)} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1 - (\frac{x+xt^2}{2})} - \int_0^1 \frac{(\frac{x+xt^2}{2})^{n+1}}{1 - (\frac{x+xt^2}{2})}\ dt \quad \text{encore par linéarité} \\
&= \int_0^1 \frac{2}{2 - x - xt^2} dt - x^{n+1}. \int_0^1 \frac{2}{2 - x - xt^2}.(\frac{1+t^2}{2})^{n+1}\ dt
\end{aligned}$$

ii. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)| &= |x|^{n+1}.|\int_0^1 \frac{2}{2 - x - xt^2}.(\frac{1+t^2}{2})^{n+1} dt| \\
&\leq |x|^{n+1} \int_0^1 |\frac{2}{2 - x - xt^2}.(\frac{1+t^2}{2})^{n+1}|\ dt \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{2}{2 - x - xt^2}.(\frac{1+t^2}{2})^{n+1}\ dt \quad \text{car} \quad 2 - x - xt^2 > 0 \quad \text{d'après 3.(a)} \\
&\leq |x|^{n+1}.\frac{4}{3(1-x)}. \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^{n+1}\ dt \quad \text{car} \quad 2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1-x) \\
&\leq |x|^{n+1}.\frac{4}{3(1-x)}. \int_0^1 (\frac{1+t}{2})^{n+1}\ dt \quad \text{car} \quad 1 + t^2 \leq 1 + t \quad \text{d'après 1.}
\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 (\frac{1+t}{2})^{n+1}\ dt = [2.\frac{(\frac{1+t}{2})^{n+2}}{n+2}]_0^1 = \frac{2}{n+2} - 2.\frac{1}{(n+2).2^{n+2}} \leq \frac{2}{n+2}$$

D'où en reportant ci-dessus :

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)| &\leq |x|^{n+1}.\frac{4}{3(1-x)}.\frac{2}{n+2} \\
&\leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}
\end{aligned}$$

Il s'agit de bien gérer l'enchainement des questions dans ce type de calcul !!!

(d) Comme $|x| \leq 1$, on obtient

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)| \leq \frac{8}{3(n+2)(1-x)}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{8}{3(n+2)(1-x)} = 0$, par encadrement $\lim_{n\to+\infty} u_k(x) = f(x)$: la série de terme général $u_n(x)$ converge et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) = f(x) = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}dt$$

(e) .D'après la question précédente, l'écart entre $f(x)$ et $\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ est inférieur à $\frac{8}{3(n+2)(1-x)}$. D'où le programme suivant, pas si effrayant que ca, dans lequel on utilise la fonction `a` de la question 1.(e) :

```
x=float(input("Entrer x : "))
p=int(input("Entrer p : "))
S=0
n=0
while 8/(3*(n+2)*(1-x))>10^(-p) :
   n=n+1
   S=S+a(n)*x^n      #on rajoute le nouveau terme de la somme
print(S,"Valeur approchée de f(x) à 10^(-p) près : ")
```

Problème

Préliminaire

1. Pour tout $t \geq 0$, $1+t \geq 1$, donc $\frac{1}{1+t} \leq 1$ (par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$).
   Par ailleurs, pour tout $t \geq 0$, $(1-t).(1+t) = 1-t^2 \leq 1$. Donc en divisant par $1+t > 0$, $1-t \leq \frac{1}{1+t}$.
   Bilan : $\boxed{\forall t \in \left[0, +\infty\right[, 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1}$
2. Soit $u \in [0; +\infty[$. En intégrant les encadrements précédents, les fonctions étant continues sur $[0, u]$ et les bornes dans le bon sens ($0 \leq u$) :

$$\int_0^u 1-t\ dt \leq \int_0^u \frac{1}{1+t}\ dt \leq \int_0^u 1\ dt \Leftrightarrow u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) \leq u$$

PARTIE I : Premier exemple de gestion d'un produit

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$.
Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

1. Soit $x \in [0,1]$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [[1,n]]$. Posons $u = \frac{x}{n} f(\frac{k}{n})$. Alors $u \geq 0$, et on peut appliquer l'encadrement du Préliminaire 2. avec cette valeur :

$$\frac{x}{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{(\frac{x}{n} f(\frac{k}{n}))^2}{2} \leq \ln(1 + \frac{x}{n} f(\frac{k}{n})) \leq \frac{x}{n} f(\frac{k}{n})$$

On obtient alors en sommant :

$$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{x^2}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{x}{n} f(\frac{k}{n})) \leq \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$$

et comme $\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{x}{n} f(\frac{k}{n})) = \ln(\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{x}{n} f(\frac{k}{n})) = \ln(u_n(x))$, on obtient enfin le résultat souhaité :

$$\boxed{\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{x^2}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})^2 \leq \ln(u_n(x)) \leq \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})}$$

(b) L'encadrement précédent se réécrit aussi :

$$x.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{x^2}{2n}.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})^2 \leq \ln(u_n(x)) \leq x.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$$

Les sommes $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})^2$ sont des sommes de Riemann associées respectivement aux fonctions f et f^2. Ces fonctions étant continues sur $[0,1]$, d'après le cours ,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)dt \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})^2 = \int_0^1 f^2(t)dt$$

Par ailleurs, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{2n} = 0$, par produit on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{2n}.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})^2 = 0$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} x.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{x^2}{2n}.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})^2 = x.\int_0^1 f(t)dt$$

$$\lim_{n\to+\infty} x.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = x.\int_0^1 f(t)dt$$

Par encadrement, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n)(x) = x.\int_0^1 f(t)dt$. Enfin, par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \exp\left(x\int_0^1 f(t)dt\right)$.

Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \exp\left(x\int_0^1 f(t)dt\right)}$

2. On pose pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = \frac{1}{1+t}$. Il s'agit bien d'une fonction continue et positive sur $[0,1]$. On remarque alors que pour tout $x \in [0,1]$,

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{x}{n}.\frac{1}{1+\frac{k}{n}}) = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{x}{n+k})$$

D'après le 1.(b), on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{x}{n+k}) = \exp(x.\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt) = \exp(x.[\ln(1+t)]_0^1) = \exp(x\ln(2))$$

Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k+n}\right) = \exp(x\ln(2)) = 2^x}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{n}{n^2+k^2}\right)$

(a) On remarque que

$$1 + \frac{n}{n^2+k^2} = 1 + \frac{1}{n}.\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$$

Posons alors pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. La fonction f est continue et positive sur $[0,1]$, et on remarque que $P_n = u_n(1)$. D'après le 1.b),

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} u_n(1) = \exp(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt) = \exp([Arctan(t)]_0^1) = \exp(\frac{\pi}{4}) - 1$$

Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = \exp(\frac{\pi}{4} - 1}$

(b)
```
def P(n):
   P=1
   for k in range(1,n+1):
      P=P*(1+n/(n**2+k**2))
   return P
```
Pour vérifier la cohérence avec le 3.a, il faut regarder si pour une valeur de n assez grande (je prends $n = 1000$), P_n est proche de $\exp(\frac{\pi}{4})$. On peut par exemple rajouter :

```
print(np.abs(P(1000)-np.exp(np.pi/4)))
```

et on regarde alors si l'écart entre ces deux valeurs est faible. La simulation sur Python donne un écart égal environ à $0,00125$ ce qui confirme bien le résultat du 3.a

PARTIE II : Etude d'une série de Riemann

1. Soit g une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$.
Nous allons (re)démontrer le fameux lemme de Riemann (cf TD).
Soit $A>0$. Posons
$$\begin{cases} u(t)=g(t) \\ v'(t)=\sin(At)\end{cases} \to \begin{cases} u'(t)=g'(t) \\ v(t)=-\frac{1}{A}\cos(At)\end{cases}$$
Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, on peut procéder à une IPP.
$$\begin{aligned}\int_0^\pi g(t)\sin(At)dt &= [-\frac{1}{A}.g(t).\cos(At)]_0^\pi+\frac{1}{A}.\int_0^\pi \cos(At).g'(t)dt \\ &= -\frac{1}{A}.g(\pi)\cos(A\pi)+\frac{1}{A}.g(0)+\frac{1}{A}.\int_0^\pi \cos(At).g'(t)dt\end{aligned}$$
D'une part, $\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A}.g(0)=0$ et comme
$$|-\frac{1}{A}.g(\pi)\cos(A\pi)|\leq \frac{1}{A}g(\pi)\to_{A\to+\infty} 0$$
on a aussi $\lim_{A\to+\infty}-\frac{1}{A}.g(\pi)\cos(A\pi)=0$. Enfin,
$$|\frac{1}{A}.\int_0^\pi \cos(At).g'(t)dt|\leq \frac{1}{A}\int_0^\pi |\cos(At).g'(t)|dt\leq \frac{1}{A}\int_0^\pi |g'(t)|dt\to_{A\to+\infty} 0$$
donc par encadrement on a aussi $\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A}.\int_0^\pi\cos(At).g'(t)dt=0$.
Bilan : $\boxed{\lim_{A\to+\infty}\int_0^\pi g(t)\sin(At)dt=0}$

2. Soit φ la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(0)=1$ et $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right],\varphi(x)=\frac{x}{\sin(x)}$

   (a) Pour tout $x\in]0,\frac{\pi}{2}]$,
$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\frac{\frac{x}{\sin(x)}-1}{x}=\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}$$
D'une part, $x\sin(x)\sim_{x\to0}x^2$. D'autre part, le DL de $\sin(x)$ en 0 à l'ordre 3 est
$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$
donc $x-\sin(x)=\frac{x^3}{6}+o(x^3)\sim_{x\to0}\frac{x^3}{6}$. Enfin,
$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\sim_{x\to0}\frac{x^3/6}{x^2}\sim_{x\to0}\frac{x}{6}\to_{x\to0}0$$
Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en 0 et } \varphi'(0)=0}$

   (b) Par quotient, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$. De plus, φ est dérivable en 0. Il reste donc à montrer que sa dérivée φ' est continue en 0.
$$\forall x\in]0,\pi],\quad \varphi'(x)=\frac{\sin(x)-x.\cos(x)}{\sin^2(x)}$$
D'une part, $\sin^2(x)\sim_{x\to0}x^2$. D'autre part, en utilisant les DL en 0 :
$$\sin(x)-x.\cos(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x.(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))=\frac{x^3}{3}+o(x^3)\sim_{x\to0}\frac{x^3}{3}$$
Ainsi,
$$\varphi'(x)\sim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x^2}\sim_{x\to0}\frac{x}{3}\to_{x\to0}0=\varphi'(0)$$
et la fonction φ' est bien continue en 0.
Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$

3. (a) Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,
$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)\quad\text{et}\quad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$$

   (b) On déduit des formules précédentes que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,
$$\sin(b)\cos(a)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$$
D'où pour tout $t\in\mathbb{R}$, pour tout $k\in\mathbb{N}$,
$$\sin(\frac{t}{2})\cos(kt)=\frac{1}{2}(\sin(kt+\frac{t}{2})-\sin(kt-\frac{t}{2}))$$
et en sommant :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\sin(\frac{t}{2})\cos(kt) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sin((2k+1)\frac{t}{2})-\sin((2k-1)\frac{t}{2}) \\ &= \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^n\sin((2k+1)\frac{t}{2})-\sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k+1)\frac{t}{2})\quad\text{via changement d'indice} \\ &= \frac{1}{2}(\sin(2(n+1)\frac{t}{2})-\sin(\frac{t}{2})\end{aligned}$$
Pour $t\in]0,\pi]$, $\sin(\frac{t}{2})\neq0$, donc en divisant le résultat précédent par $\sin(\frac{t}{2})$ on obtient le résultat souhaité.

Bilan : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall t\in\left]0,\pi\right],\sum_{k=1}^n\cos(kt)=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$

4. (a)
$$\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt=[\frac{t^3}{6\pi}-\frac{t^2}{2}]_0^\pi=\frac{\pi^3}{6\pi}-\frac{\pi^2}{2}=-\frac{\pi^2}{3}$$

   (b) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Notons $I=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)dt$. On procède à une IPP. Notons :
$$\begin{cases} u(t)=\frac{t^2}{2\pi}-t & u'(t)=\frac{t}{\pi}-1 \\ v'(t)=\cos(kt) & v(t)=\frac{1}{k}\sin(kt)\end{cases}$$
Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
$$I=[(\frac{t^2}{2\pi}-t).\frac{1}{k}\sin(kt)]_0^\pi-\frac{1}{k}.\int_0^\pi(\frac{t}{\pi}-1).\sin(kt)dt=-\frac{1}{k}.J$$
où $J=\int_0^\pi(\frac{t}{\pi}-1).\sin(kt)dt$, car $\sin(0)=\sin(k\pi)=0$. On procède à une seconde IPP. Notons :
$$\begin{cases} u(t)=\frac{t}{\pi}-1 & u'(t)=\frac{1}{\pi} \\ v'(t)=\sin(kt) & v(t)=-\frac{1}{k}\cos(kt)\end{cases}$$
Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
$$\begin{aligned} J &= [(\frac{t}{\pi}-1).(-\frac{1}{k}\cos(kt))]_0^\pi+\frac{1}{\pi.k}.\int_0^\pi\cos(kt)dt \\ &= -\frac{1}{k}+\frac{1}{\pi.k}.[\frac{1}{k}.\sin(kt)]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{k}\end{aligned}$$
Finalement, $I=-\frac{1}{k}.J=\frac{1}{k^2}$.
Bilan : $\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N}^*:\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)dt=\frac{1}{k^2}}$

5. (a) La relation du 3.b :
$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$
implique que
$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{t^2}{2\pi}-t).\cos(kt) = -\frac{(\frac{t^2}{2\pi}-t)}{2}+(\frac{t^2}{2\pi}-t)\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{(\frac{t^2}{2\pi}-t)}{2}+(\frac{t}{2\pi}-1).\varphi(\frac{t}{2}).\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)$$
Puis en intégrant entre 0 et π, les fonctions étant bien toutes continues sur $[0,\pi]$ puisque nous avons prouvé que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$:
$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}(\frac{t^2}{2\pi}-t).\cos(kt) = -\frac{1}{2}.\int_0^{\pi}(\frac{t^2}{2\pi}-t)dt + \int_0^{\pi}(\frac{t}{2\pi}-1).\varphi(\frac{t}{2}).\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)$$
et avec les résultats précédents :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi}(\frac{t}{2\pi}-1).\varphi(\frac{t}{2}).\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)$$

(b) On utilise le résultat de la question II.1, avec la fonction $g(t) = (\frac{t}{2\pi}-1).\varphi(\frac{t}{2})$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, et avec $A = \frac{2n+1}{2}$. On peut alors dire que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}(\frac{t}{2\pi}-1).\varphi(\frac{t}{2}).\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) = 0$$
et donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Bilan : $\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{n^2} \text{ est convergente et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

PARTIE III : Etude d'une suite d'intégrales

1. (a)
$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln(2)$$
$$I_2 = \int_0^1 \frac{2}{(x+1)(x+2)}dx$$
On cherche α et β tels que
$$\frac{2}{(x+1)(x+2)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2} = \frac{(\alpha+\beta).x+2\alpha+\beta}{(x+1)(x+2)}$$
En identifiant les coefficients puis en résolvant un petit système, on trouve que $\alpha = 2$ et $\beta = -2$. Finalement,
$$I_2 = 2.\int_0^1\frac{1}{x+1}dx - 2.\int_0^1\frac{1}{x+2}dx = 2\ln(2) - 2.\ln(3) + 2.\ln(2) = 4\ln(2) - 2\ln(3)$$

(b) D'une part, la fonction f_n étant à valeurs positives et les bornes dans le bon sens, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$. D'autre part, pour tout $n \geq 1$,
$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \prod_{k=1}^{n+1}\frac{k}{x+k} - \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{x+k}dx \\ &= \int_0^1 (\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{x+k}).(\frac{n+1}{x+n+1}-1)dx \\ &= -\int_0^1(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{x+k}).\frac{x}{x+n+1}dx \leq 0 \end{aligned}$$
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

Bilan : $\boxed{\text{étant décroissante et minorée par 0, la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$

2. (a) En appliquant l'inégalité du Préliminaire avec $u = \frac{1}{k}$ puis en sommant pour k de 1 à n, on obtient sans problème : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n - \frac{1}{2}B_n \leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq A_n}$

(b) On remarque que :
$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\ln(k) = \ln(n+1) \text{ par télescopage}$$
D'où :
$$A_n - \frac{1}{2}B_n \leq \ln(n+1) \leq A_n$$
et en divisant par $A_n > 0$:
$$1 - \frac{1}{2}\frac{B_n}{A_n} \leq \frac{\ln(n+1)}{A_n} \leq 1$$
Comme $\lim_{n\to+\infty}A_n = +\infty$ (on reconnait la somme partielle de la série harmonique) et $\lim_{n\to+\infty}B_n = \frac{\pi^2}{6}$ (cf II.), on trouve que $\lim_{n\to+\infty}1 - \frac{1}{2}\frac{B_n}{A_n} = 1$. Donc par encadrement, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{A_n} = 1$ d'où $A_n \sim_{n\to+\infty} \ln(n+1)$. Enfin,
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+1/n))}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \to_{n\to+\infty} 1$$
donc $\ln(n+1) \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$.

Bilan : $\boxed{A_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)}$

Ce qui est un résultat hyper-classique...

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$,
$$g_n(x) = -\ln(f_n(x)) = -\ln(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{x+k}) = \sum_{k=1}^{n}\ln(x+k)-\ln(k) = \sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{x}{k})$$

(b) En appliquant le Préliminaire pour $u = \frac{x}{k}$ puis en sommant, on obtient :
$$xA_n - \frac{x^2}{2}B_n \leq g_n(x) \leq xA_n \Leftrightarrow xA_n - \frac{x^2}{2}B_n \leq -\ln(f_n(x)) \leq xA_n$$
D'où en passant à l'inverse et en appliquant la fonction exponentielle (croissante sur $\mathbb{R}$) :
$$\forall x \in \left[0,+\infty\right[, \forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-xA_n} \leq f_n(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}B_n - xA_n}$$

(c) Si $x > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} -xA_n = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2}{2}B_n - xA_n = -\infty$, d'où par encadrement $\lim_{n\to+\infty}f_n(x) = 1$. Si $x = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$.

4. (a) En repartant de la relation du III.3.b, et en intégrant entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{A_n}}$ (fonctions continues et bornes bon sens) :
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{A_n}}} e^{-xA_n}dx \leq J_n \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{A_n}}} e^{\frac{x^2}{2}B_n - xA_n}dx$$
De plus, pour tout $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{A_n}}]$,
$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{2}B_n \leq \frac{B_n}{2A_n} \\ \Rightarrow\ & e^{\frac{x^2}{2}B_n} \leq e^{\frac{B_n}{2A_n}} \text{ par croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$
On en déduit alors que
$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\frac{1}{\sqrt{A_n}}} e^{-xA_n}dx \leq J_n \leq e^{\frac{B_n}{2A_n}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{A_n}}} e^{-xA_n}dx}$$

(b) On calcule facilement :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{A_n}}} e^{-xA_n}dx = [-\frac{1}{A_n}.e^{-x.A_n}]_0^{\frac{1}{\sqrt{A_n}}} = \frac{1}{A_n}.(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{A_n}}})$$

On en déduit que

$$\frac{1}{A_n}.(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{A_n}}}) \leq J_n \leq e^{\frac{B_n}{2A_n}}.\frac{1}{A_n}.(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{A_n}}})$$

soit aussi comme $A_n > 0$:

$$1-e^{-\frac{1}{\sqrt{A_n}}} \leq A_n.J_n \leq e^{\frac{B_n}{2A_n}}.(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{A_n}}})$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} B_n = \frac{\pi^2}{6}$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} 1-e^{-\frac{1}{\sqrt{A_n}}} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{B_n}{2A_n}} = 1$$

et par encadrement $\lim_{n\to+\infty} A_n.J_n = 1$.

Bilan : $\boxed{J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{A_n}}$

5. (a) Tout d'abord, la fonction f_n étant continue et positive sur $[\frac{1}{\sqrt{A_n}}, 1]$ et les bornes étant dans le bon sens, $K_n \geq 0$. Ensuite, on obtient comme au 4.a,

$$K_n \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{A_n}}}^1 e^{\frac{x^2}{2}B_n - xA_n}dx$$

d'où

$$\begin{aligned}
K_n &\leq \int_{\frac{1}{\sqrt{A_n}}}^1 e^{\frac{B_n}{2}}.e^{-x.A_n}dx \quad \text{car} \quad e^{\frac{x^2}{2}B_n} \leq e^{\frac{B_n}{2}} \\
&\leq e^{\frac{B_n}{2}}.[-\frac{1}{A_n}.e^{-x.A_n}]_{\frac{1}{\sqrt{A_n}}}^1 \\
&\leq e^{\frac{B_n}{2}}.(\frac{1}{A_n}.e^{-\sqrt{A_n}} - \frac{1}{A_n}.e^{-A_n}) \\
&\leq e^{-\sqrt{A_n}}\frac{e^{\frac{B_n}{2}}}{A_n}
\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq K_n \leq e^{-\sqrt{A_n}}\frac{e^{\frac{B_n}{2}}}{A_n}}$

(b) On en déduit comme $A_n > 0$ que

$$0 \leq K_n.A_n \leq e^{-\sqrt{A_n}}.e^{\frac{B_n}{2}}$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{A_n}}.e^{\frac{B_n}{2}} = 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} K_n.A_n = 0$.

Bilan : $\boxed{K_n = o\left(\frac{1}{A_n}\right)}$

6. D'après la relation de Chasles, $I_n = J_n + K_n$. Comme $J_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{A_n}$ et $K_n = o_{n\to+\infty}\frac{1}{A_n}$, on a $I_n \sim_{n\to} \frac{1}{A_n}$. Enfin, d'après le III.2.b, $A_n \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$.

Bilan : $\boxed{I_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)}}$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) \leq n-1$ (classique) donc $\frac{\ln(n)}{\leq}n$. On en déduit que $\frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n}$. La série de t.g. $\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc par majoration, puis par équivalence, la série de t.g. I_n diverge également.