DM n° 4 - pour le mardi 15 octobre 2024

Ce devoir est en **auto-correction** : un corrigé vous sera envoyé sur le site le mardi 15/10/24.
D'ici là, n'hésitez pas à me poser des questions !

Exercice 1 : spectre de AB et spectre de BA

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et I_n désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

1. Dans cette question uniquement, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer AB et BA.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de AB et de BA.

Soit maintenant A et B deux matrices quelconques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit λ une valeur propre non nulle de AB et X un vecteur propre associé.
   (a) Justifier que $BX \neq 0$.
   (b) Montrer que BX est un vecteur propre de BA et que λ est une valeur propre de BA.
3. Supposons que 0 est une valeur propre de AB et X un vecteur propre associé.
   (a) Supposons que B est inversible.
   Justifier que $BX \neq 0$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA.
   (b) Supposons que B n'est pas inversible. Montrer que $\mathrm{rg}(BA) < n$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA.
4. Montrer que AB et BA ont le même spectre.
5. Les matrices AB et BA ont-elles les mêmes sous-espaces propres?

Partie 2

On considère A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Soit B une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$.

6. Supposons qu'il existe un n-uplet de réels non tous nuls ($\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$) tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$.
   (a) Justifier que A admet un polynôme annulateur non nul Q de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   (b) En étudiant les racines de ce polynôme Q annulateur de A, aboutir à une contradiction.
   (c) Que peut-on déduire sur la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$?
7. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
   (a) Justifier que l'espace propre de A associé à la valeur propre λ est l'espace vectoriel engendré par X.
   (b) Exprimer de deux manières différentes BAX.
   (c) En déduire que $BX \in \mathrm{Vect}(X)$.
8. Déduire que tout vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B.
9. (a) Justifier qu'il existe une base $(X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A et de B telle que :
   $$\forall i \in [\![1, n]\!], AX_i = \lambda_i X_i$$
   (b) Pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, on note μ_i le réel tel que $BX_i = \mu_i X_i$. Montrer que $\mathrm{Sp}(AB) = \{\lambda_i \mu_i, i \in [\![1, n]\!]\}$.
10. On rappelle que le seul polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ ayant n racines deux à deux distinctes est le polynôme nul.
    (a) Montrer que l'application $P \mapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$.
    (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ vérifiant
    $$\forall i \in [\![1, n]\!], BX_i = P(\lambda_i) X_i$$
    (c) Montrer que $B = P(A)$.
11. (a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
    (b) Montrer que $\mathscr{C}(A) = \{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}$.
    (c) À l'aide de la question 6 , déterminer la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

Exercice 2 : matrices magiques

Partie 1 : Étude de trois matrices

On note A, J et S les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A^3 = -3A$. En déduire que $Sp(A) = \{0\}$.
   La matrice A est-elle diagonalisable?
2. Justifier que J et S sont diagonalisables, et vérifier que $SJ = JS$.
3. On admet que $Sp(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Montrer que tout vecteur propre de S est vecteur propre de J.
4. En déduire qu'il existe une matrice P inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (qu'on ne demande pas de déterminer) telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

Partie 2 : Étude des matrices magiques

Soit $n \geqslant 3$. On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est magique quand les sommes des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont égales. Ainsi en notant $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$:

- $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$
- pour tout i de $[\![1,n]\!]$, $\ell_i(M) = \sum_{j=1}^n m_{i,j}$,
- pour tout j de $[\![1,n]\!]$, $c_j(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,j}$,
- $d_1(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$ et $d_2(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,n-i+1}$,

alors :

M est magique si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M)$$

Si M est une matrice magique, la valeur de ces sommes est alors notée $s(M)$ et appelée somme de la matrice M.

On note $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des matrices réelles magiques d'ordre n, et on admet que $\mathscr{E}_\mathbf{n}$ ainsi défini est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_\mathbf{n}(\mathbb{R})$.

5. Montrer que ℓ_1 est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   On admettra dans la suite que, pour tout i de $[\![2,n]\!]$ et pour tout j de $[\![1,n]\!]$, les applications ℓ_i, c_j, d_1, d_2 et s sont des formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
6. On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{E}_n$ de somme nulle.

   Montrer que $\mathcal{K}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}_n$.
7. Soit $M \in \mathscr{E}_n$. Montrer que ${}^tM$ est aussi un élément de $\mathscr{E}_n$ et déterminer $s\left({}^tM\right)$.
8. Soit $M \in \mathscr{E}_n$. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $M - \lambda J_n \in \mathcal{K}_n$, avec $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
9. Soit $M \in \mathscr{E}_n$. Montrer que $W_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Partie 3 : Étude du cas où $n = 3$

On se place dans cette partie dans le cas particulier où $n = 3$.

10. Vérifier que les matrices A, J et S définies dans la partie 1 sont magiques, et déterminer leur somme.
11. Montrer que pour toute matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(M_1, M_2) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2$ tel que :

$$M = M_1 + M_2, \qquad \text{avec } \begin{cases} M_1 \text{ antisymétrique} \\ M_2 \text{ symétrique.} \end{cases}$$

    On explicitera notamment M_1 et M_2 en fonction de M.
12. Soit $M \in \mathcal{K}_3$. On écrit $M = M_1 + M_2$ selon la décomposition vue en question 11 .
    (a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{K}_3$.
    (b) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$M_1 = \alpha A \quad \text{et} \quad M_2 = \beta S.$$

13. En déduire une base de $\mathcal{K}_3$, puis montrer que (A, J, S) est une base de $\mathscr{E}_3$.
14. On note $\Delta = \left\{ M \in \mathscr{E}_3 / P^{-1}MP \text{ est diagonale } \right\}$, où P est la matrice définie dans la partie 1 . Montrer que $\Delta = \text{Vect}(J, S)$.

N. Marconnet - Lycée Saint Just 4 ECG2 - Maths Appro - Année 2024-2025