Exercices - Intégrales impropres

Exercice 1

1. ***Une intégrale impropre en*** $+\infty$

   On note : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$

   (a) Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de la courbe de f .

   (b) Soit $A > 1$. On note $I_A = \int_1^A f(x)dx$. Justifier l'existence de I_A et hachurer l'aire correspondante.

   (c) Déterminer $\lim_{A\to+\infty}(I_A)$ et interpréter ce résultat.

2. ***Une intégrale impropre en un réel*** x_0

   On note : $\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$

   (a) Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de la courbe de f.

   (b) Soit $\epsilon \in]0,1]$. On note $I_\epsilon = \int_\epsilon^1 f(t)dt$. Justifier l'existence de I_ϵ et hachurer l'aire correspondante.

   (c) Par changement de variable, justifier l'existence de $\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ >}}(I_\epsilon)$ et interpréter ce résultat.

3. ***Une intégrale doublement impropre***

   On note : $\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad f(t) = \dfrac{e^{1-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$

   (a) Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé en faisant apparaître le point d'abscisse 1 sur cette courbe.

   (b) Déterminer la nature et le cas échéant, la valeur de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} f(t)dt$ et hachurer l'aire correspondante.

   (c) Déterminer la nature et le cas échéant, la valeur de l'intégrale $J = \int_0^1 f(t)dt$ et hachurer l'aire correspondante.

   (d) En déduire la nature et la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Exercice 2

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t^3}dt \qquad J_2 = \int_0^1 x^3(\ln(x))^2dx \qquad J_3 = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}dx$$

$$J_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+t^2}dt \qquad I_\alpha = \int_1^{+\infty} \ln(1+t^\alpha)dt \quad \text{discussion suivant les valeurs de } \alpha$$

Exercice 3

Une suite d'intégrales impropres

Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n, on pose $I_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}(1-e^{-t})^n\, dt$

1. Justifier la convergence de l'intégrale $I_n(a)$.

2. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(1) = \frac{1}{n+1}$.

   (b) En déduire que pour tout réel $a \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n(a)) = 0$.

3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall a > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)(I_n(a) - I_{n+1}(a)) = aI_{n+1}(a)$$

   (b) En déduire $I_n(a)$ en fonction de n et de a.

   (c) Ecrire une fonction Python, d'intitulé `def I(n,a):` de paramètres n et a, qui calcule $I_n(a)$

Exercice 4

Intégrale de Dirichlet

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente.

   On pourra intégrer par parties

   On admet que l'on montre de même que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}dx$ est convergente.

2. (a) Montrer que: $\forall x \geq 1,\ |\sin(x)| \geq \sin^2(x)$, puis que $\left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| \geq \dfrac{1}{2x} - \dfrac{\cos(2x)}{2x}$.

   (b) En déduire que: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx$ diverge.

   Bilan : $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx \text{ est convergente mais pas absolument convergente.}}$

Exercice 5

Des changements de variables

Montrer que les intégrales suivantes convergent et préciser leur valeur.

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$ à l'aide du changement de variables $u = \sin(t)$.

2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$ à l'aide du changement de variables $u = \frac{1}{t}$

Exercice 6

Les moments d'une Gaussienne

On note :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt$$

1. Justifier que la suite $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie

2. Justifier que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\quad J_{2r+1} = 0$.

3. **Les moments d'ordre pair :** On note : $\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = I_{2n} = \int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt$.

   (a) Calculer K_0.

   (b) Calculer K_n en fonction de n.

   (c) En déduire la valeur de J_{2n} pour tout entier naturel n.

Exercice 7

On définit pour $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$

1. Montrer que f est bien définie sur $]0,+\infty[$.

2. Montrer que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8
Une série et une suite

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\,dt$ est convergente.
2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\ln^2(t)\,dt$.
3. Montrer que pour tout $t \in [0;1]$: $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$
4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ est convergente et exprimer sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ en fonction de I.

Exercice 9
Reste d'une intégrale convergente
On considère l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\frac{-u^2}{2}}du$.

1. A l'aide du cours, préciser la valeur de J.
2. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du$.
   Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. (a) Montrer la convergence et déterminer la valeur pour tout réel x positif, de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}}\,du$.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant xf(x) \leqslant e^{-\frac{x^2}{2}}$.
   (c) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et calculer I.

Exercice 10
Une suite d'intégrales impropres

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ et $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n converge. Calculer I_1.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis justifier qu'elle est convergente.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, établir une relation entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Exercice 11
Utilisation de la fonction Gamma
Il s'agit à chaque fois de se ramener à la fonction Gamma.

1. Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\sqrt{t}\,e^{-t}\,dt$
2. Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t+1)^3e^{-t}\,dt$
3. Montrer que $I_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^ne^{-at}\,dt$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et calculer sa valeur.
4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \displaystyle\int_0^1 t.(\ln(t))^n.dt$. Justifier la convergence de J_n et calculer sa valeur.

Exercice 12

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues, où
$$\int_0^{+\infty} (f(t))^2.dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} (g(t))^2.dt$$
convergent. Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t).g(t).dt$ converge absolument.
2. Soit
$$E = \{f \in \mathcal{C}^0([0;+\infty[) \ \text{ où } \int_0^{+\infty} (f(t))^2.dt \text{ converge}\}$$
Justifier que E est un sev de $\mathcal{C}^0([0;+\infty[)$.