`Informatique : programmation en langage Python`

Révision des instructions sur les matrices : définition d'une matrice, matrices usuelles, opérations usuelles sur les matrices.
Calcul d'une somme ou d'un produit : par boucle `for` ou en utilisant les matrices du type `np.arange(1,n+1,1)` et les instructions `np.sum`, `np.prod`. Tracé d'une courbe en Python, calcul des termes d'une suite.

Chapitre 3. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (suite et fin)

I. Valeurs propres et vecteurs propres

II. Diagonalisation

1. Cas des endomorphismes

- f est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.
- f est diagonalisable si et seulement si
$$E = \oplus_{\lambda \in Spec(f)} Ker(f - \lambda.Id)$$
- f est diagonalisable si et seulement si
$$\sum_{\lambda \in Spec(f)} \dim(Ker(f - \lambda Id_E) = \dim(E)$$
- **Condition suffisante de diagonalisabilité**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim(E) = n$. **Si** f admet n valeurs propres distinctes **alors** f est diagonalisable et tout sous-espace propre de f est de dimension 1.

2. Cas des matrices

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si elle est semblable à une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(K)$, i.e. s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale.
- A est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{C}' = (U_1, \cdots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (respectivement associés aux valeurs propres λ_1, ..., λ_n). Dans ce cas, la matrice $P = (U_1|U_2 \mid \cdots |U_n)$ (obtenue en concaténant les colonnes U_1, ..., U_n) diagonalise A :
$$P^{-1}.A.P = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$
- A est diagonalisable si et seulement si
$$\oplus_{\lambda \in Spec(A)} Ker(A - \lambda.I) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$
- A est diagonalisable si et seulement si
$$\sum_{\lambda \in Spec(A)} \dim(Ker(A - \lambda.I)) = n$$
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Spec(A) \neq \emptyset$. Alors :
$$Card(Spec(A)) \leq \sum_{\lambda \in Spec(A)} \dim(Ker(A - \lambda I)) \leq n$$
- **condition suffisante de diagonalisabilité**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **Si** A admet n valeurs propres distinctes **alors** A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
- **cas des matrices symétriques**
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.
- 1. Deux matrices semblables A et B ont le même spectre. (*)
  2. Les matrices A et ${}^tA$ ont le même spectre. (*)
- **Exercice à savoir refaire**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice admettant une unique valeur propre λ. A quelle condition A est-elle diagonalisable ?

3. Lien endomorphismes - matrices

Soit E un e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, f un endomorphisme de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

1. $Spec(f) = Spec(A)$
2. u est un vecteur propre de $f \Leftrightarrow X = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est un vecteur propre de A
3. f est diagonalisable $\Leftrightarrow A$ est diagonalisable.
4. Si $\mathcal{B}' = (u_1, \cdots, u_n)$ est une base de vecteurs propres de f, alors $A = PDP^{-1}$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont associés aux vecteurs propres $u_1, \cdots, u_n$.
5. P est un polynôme annulateur de $f \Leftrightarrow P$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice à savoir refaire rapidement :

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de J, montrer que J est diagonalisable, déterminer des matrices inversible P et diagonale D telles que $J = P.D.P^{-1}$

Chapitre 4. Intégrales impropres (sauf fonction Gamma)

I. Nature et valeur d'une intégrale impropre

- Définition. Intégrale impropre à gauche, à droite. Lien avec l'aire sous la courbe dans le cas des fonctions positives.
- Intégrale doublement impropre : on coupe l'intégrale en deux.
- Intégrale multiplement impropre : on coupe en autant de morceaux que nécessaire.
- Intégrale faussement impropre : attention **uniquement** pour des intégrales impropres **en un réel** b
- Intégrale grossièrement divergente en $+\infty$ (ou en $-\infty$) :
  si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, ou bien $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \neq 0$ alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est (grossièrement) divergente.
  Attention si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ on ne peut rien en déduire sur la nature de $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.
  Si f n'a pas de limite en $+\infty$ on ne peut rien en déduire non plus.
- Intégrale des fonctions continues par morceaux.
- Reste d'une intégrale impropre convergente.

II. Intégrales usuelles

- Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$ (*).
  Dans le cas où $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$ (*)
- Intégrales de Riemann "simples" :
  L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
  Valeurs des intégrales HP : à savoir recalculer si nécessaire
- Intégrales de Riemann "simples" (variante)
  Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et c un réel strictement positif.
  L'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{c} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

- Intégrale de Riemann impropre en un réel : cas général.
  Soit a et b deux réels, $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} \frac{1}{(b-t)^\alpha}\, dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\, dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- Intégrale de Gauss :
  $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}\, dt}$ existe et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\, \pi}$
  ADMIS. Valeur à connaître par coeur.

Exercice à savoir refaire :

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et la calculer.

HP mais sert souvent !! Connaître la primitive de la fonction $\ln$

III. Propriétés et méthodes de calcul

- Linéarité (si intégrales convergentes !).
- Relation de Chasles (si intégrales convergentes !)
- Positivité, croissance, stricte positivité (idem). Fonction continue positive d'intégrale nulle.

IV. Techniques de calcul

Que <u>deux</u> techniques classiques : être réactif lors des exercices !!

- Intégration par parties : sur bornes propres uniquement. Commencer par fixer des bornes.
- Changement de variables. On peut faire le changement sur bornes impropres. Méthode "en six points".
  Ne pas oublier φ $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Conclusion : les deux intégrales sont de même nature. En cas de convergence elles sont égales.
- Fonctions paires et impaires.

V. Critères de convergence pour les fonctions positives

Critères de majoration, d'équivalence, de négligeabilité pour les fonctions positives (fonctions négatives marche aussi).

VI. Convergence absolue

.

(*) : **preuve exigible**