Exercice 1

1. * $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\alpha P+Q) = \alpha P + Q + (\alpha P + Q)'$$
$$= \alpha(P+P') + (Q+Q')$$
$$= \alpha\phi(P) + \phi(Q)$$ donc ϕ est linéaire

* Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P' \in \mathbb{R}_n[X]$ donc ϕ va de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

* Ainsi $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. * $\phi(1) = 1$

* $\forall k \in [\![1;n]\!]$,

$\phi(X^k) = X^k + kX^{k-1}$.

Notons $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Comme cette matrice est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

3. Donc $\mathrm{Spec}(\phi) = 1$.

4. Supposons ϕ diagonalisable.

Alors $\exists \mathcal{B}'$ base de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(Id_{\mathbb{R}_n[X]})$$

donc $\phi = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$: faux !

Donc ϕ n'est pas diagonalisable.

5. $0 \notin \mathrm{Spec}(A)$ donc A est inversible et ϕ est bijective. ϕ est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2

1. (a) $f(u) = f(e_1 + e_2 + \dots + e_n)$
$= f(e_1) + f(e_2) + \dots + f(e_n)$ par linéarité de f
$= nu$

Donc u est un vecteur propre de f.

(b) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$
$= \mathrm{Vect}(u, \dots, u)$
$= \mathrm{Vect}(u)$

Montrons que $\mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f)$.

- $\supset$: $f(u) = nu$ donc $u \in \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{Id}_E)$.
  Ainsi $\mathrm{Vect}(u) \subset \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{Id}_E)$
  et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{Id}_E)$
- $\subset$: Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{Id}_E)$.
  Alors $f(x) = nx \Rightarrow x = f\left(\frac{1}{n}x\right)$
  donc $x \in \mathrm{Im}(f)$. D'où $\mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(f)$
- Par double inclusion, $\underline{\mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f)}$

2. (a)

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} & \end{array}$$

(b) $A^2 = nA \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = n.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
$\iff f^2 = nf$

le polynôme $P = X^2 - nX$ est annulateur de f.

Comme $\mathrm{Spec}(f) \subset \{\text{racines de } P\}$, on a

$\underline{\mathrm{Spec}(f) \subset \{0, n\}}$

(c)

$\mathrm{rg}(A) = 1$ donc $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $\underline{\dim \mathrm{Ker}(f) = n-1}$.

On remarque que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

etc... $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Par conséquent, $\forall k \in [\![2; n]\!]$, le vecteur

$v_k = e_1 - e_k$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.

On montre facilement que la famille $(v_2, \dots, v_n) = \mathcal{B}_1$

est libre. Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_1) = n - 1 = \dim \mathrm{Ker}(f)$,

$\underline{\text{c'est une base de } \mathrm{Ker}(f)}$.

(d) $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc $0 \in \mathrm{Spec}(f)$
$u \in \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{Id}_E)$ donc $n \in \mathrm{Spec}(f)$

Ainsi $\{0, n\} \subset \mathrm{Spec}(f)$ et d'après le (b),

$\underline{\mathrm{Spec}(f) = \{0, n\}}$

(e) $\dim \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \underbrace{\dim \mathrm{Vect}(u) + n - 1}_{= n}$

Donc f est diagonalisable.

Ex. 2 (suite)

- $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

$= \mathrm{Diag}(n, 0, 0, \dots, 0)$

conviennent

⚠ Respecter l'ordre valeurs propres / vecteurs propres.

Exercice 3

1. $P = X^2 + 2X = X(X+2)$ est annulateur de f.

Comme $\mathrm{Spec}(f) \subset \{\text{racines de } P\}$,

$\mathrm{Spec}(f) \subset \{-2, 0\}$

2. • D'après le Th. du rang,

$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = p = \dim E$ ①

• Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.

- L'inclusion $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ est évidente.

- Soit $u \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Comme $u \in \mathrm{Im}(f)$: $\exists t \in E \,/\, u = f(t)$.

Alors $f(u) = 0_E \Leftrightarrow f \circ f(t) = 0$

$\Leftrightarrow -2f(t) = 0$

$\Leftrightarrow -2u = 0$

$\Leftrightarrow u = 0$

D'où $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.

- Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ ②

• D'après ① et ②, $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

3. Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f + 2Id_E)$

$\supset$: soit $x \in \mathrm{Ker}(f + 2Id_E)$.

Alors $f(x) = -2x \Leftrightarrow x = f\left(\frac{-x}{2}\right)$ donc $x \in \mathrm{Im}(f)$.

D'où $\mathrm{Ker}(f + 2Id_E) \subset \mathrm{Im}(f)$

$\subset$: Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$: $\exists t \in E \,/\, x = f(t)$.

Alors $(f + 2Id_E)(x) = f^2(t) + 2f(t) = 0_E$ car $f^2 = -2f$

D'où $x \in \mathrm{Ker}(f + 2Id_E)$.

Ainsi $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f + 2Id_E)$.

Par double inclusion, $\underline{Im(f) = Ker(f + 2Id_E)}$

4. On a donc

$$Ker(f) \oplus Ker(f + 2Id_E) = E$$

$$\Leftrightarrow \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} Ker(f - \lambda Id_E) = E$$

donc $\underline{f \text{ est diagonalisable}}$.

Rque : en concaténant une base $\mathcal{B}_1$ de $Ker(f)$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $Ker(f + 2Id_E)$, on obtient une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = Diag(0, 0, \dots, 0, -2, \dots, -2)$$

Exercice 4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 1$ donc $\underline{\dim Ker(A) = 2}$

De plus $A . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\underline{4 \in Sp(A)}$

Ainsi $\dim Ker(A - 4I) \geq 1$

Comme

$$3 \leq \dim Ker(A) + \dim Ker(A - 4I) \leq 3$$

on a nécessairement $\dim Ker(A - 4I) = 3$,

et $\underline{\dim Ker(A) + \dim Ker(A - 4I) = 3}$:

$\underline{Spec(A) = \{0, 4\} \text{ et } A \text{ est diagonalisable}}$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $Ker(A)$, non colinéaires, donc forment une base de $Ker(A)$.

Finalement,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

vérifient $\underline{A = PDP^{-1}}$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

B est symétrique réelle donc diagonalisable.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = 4B$$

le polynôme $X^2 - 4X$ est annulateur de B.

Donc $Sp(B) \subset \{0, 4\}$.

• $rg(B) = 1$ donc $\dim Ker(B) = 3$ et $0 \in Sp(B)$

les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

appartiennent à $Ker(B)$ et forment une famille libre (facile). Ils forment donc une base de $Ker(B)$

• $B . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

donc $\dim Ker(B - 4I) \geq 1$ et $4 \in Sp(B)$.

• D'où $Sp(B) = \{0, 4\}$

(Comme $4 \leq \dim Ker(B) + \dim Ker(B - 4I) \leq 4$, $\dim Ker(B) + \dim Ker(B - 4I) = 4$: B est diagonalisable.)

Les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = Diag(0,0,0,4)$

vérifient : $B = PDP^{-1}$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

C est symétrique réelle donc diagonalisable

$$C - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Travaillons sur les réduites de Gauss de $C - \lambda I_3$

$$C - \lambda I_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 1-\lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & -4(1-\lambda) & 8+2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - (1-\lambda)L_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 24+2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$$

Une matrice est inversible ssi ses réduites le sont.

Donc $C-\lambda I_3$ non inversible

$\Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $-\lambda^2+2\lambda+24=0$

$\Leftrightarrow \lambda=1$ ou $\lambda=-4$ ou $\lambda=6$.

Ainsi $\mathrm{Spec}(C)=\{-4,1,6\}$.

($C\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet trois valeurs propres distinctes donc C est diagonalisable.)

* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(C-I)$

$\Leftrightarrow CX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+3z\\y+4z\\3x+4y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3z=0\\ 0=0\\ 3x+4y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0\\ x=-\frac{4}{3}y\end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(C-I)=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}y\\y\\0\end{pmatrix} / y\in\mathbb{R}\right\}$

$=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-4/3\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}$

* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(C+4I)$

$\Leftrightarrow CX=-4X \Leftrightarrow \begin{cases} x+3z=-4x\\ y+4z=-4y\\ 3x+4y+z=-4z\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3z=0\\ 5y+4z=0\\ 3x+4y+5z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{5}z\\ y=-\frac{4}{5}z\\ -\frac{9}{5}z-\frac{16}{5}z+5z=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{5}z\\ y=-\frac{4}{5}z\\ 0=0\end{cases}$

$\mathrm{Ker}(C+4I)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-3/5\\-4/5\\1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-3\\-4\\5\end{pmatrix}\right)$

* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(C-6I)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3z=6x\\ y+4z=6y\\ 3x+4y+z=6z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+3z=0\\ -5y+4z=0\\ 3x+4y-5z=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5}z\\ y=\frac{4}{5}z\\ 0=0\end{cases}$ $\mathrm{Ker}(C-6I)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right)$

Avec $P=\begin{pmatrix}-3&-4&3\\-4&3&4\\5&0&5\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

on a $C=PDP^{-1}$

<u>Exercice 5</u> : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 10 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

1.
$$(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & 10 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & 10 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. D'où $A^2-2A+I_3=0 \Leftrightarrow A(2I_3-A)=I_3$

A est inversible et $A^{-1}=-A+2I_3$

3. $P=X^2-2X+1=(X-1)^2$ est polynôme annulateur de A.

Donc $Spec(A) \subset \{1\}$.

On remarque que $A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $1 \in Spec(A)$.

Ainsi $Spec(A)=\{1\}$.

4. Supposons A diagonalisable. Alors

$A=PDP^{-1}$ où P inversible et $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$

$\Rightarrow A=PI_3P^{-1}=PP^{-1}=I_3$: absurde !

Donc A n'est pas diagonalisable.

5. (a). D'après le Th. de la division euclidienne,

$\exists ! (Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2 /$

$$X^n = (X-1)^2Q+R \text{ où } \deg R \leq 1$$

$$X^n = (X-1)^2Q+aX+b$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^n = (x-1)^2Q(x)+ax+b$ (*)

et en dérivant $nx^{n-1} = 2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$ (**)

(*) avec $x=1$: $a+b=1$

(**) avec $x=1$: $a=n$

D'où $R=nX+(1-n)$.

(b) $A^n = \underbrace{(A-I_3)^2}_{=0}Q(A)+nA+(1-n)I_3$

donc $A^n = nA+(1-n)I_3$.

<u>Exercice 6</u>

1. Soit $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$X \in Ker(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y-2z=0 \\ x \quad -z=0 \\ 3x-2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ x-y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=y=z$.

D'où $Ker(f)=Vect((1,1,1))$. La famille $((1,1,1))$ est une base de $Ker(f)$ et $\dim Ker(f)=1$.

2.

* Déterminons $\mathrm{Ker}(A-I_3)$. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X\in\mathrm{Ker}(A-I_3) \iff AX=X$$

$$\iff \begin{cases} 4x-2y-2z=x \\ x \quad -z=y \\ 3x-2y-z=z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x-2y-2z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x-2y-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases} \qquad \mathrm{Ker}(f-Id_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Vect}((0,1,-1))$$

* Déterminons $\mathrm{Ker}(A-2I_3)$. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$X\in\mathrm{Ker}(A-2I_3) \iff AX=2X$$

$$\iff \begin{cases} 4x-2y-2z=2x \\ x \quad -z=2y \\ 3x-2y-z=2z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-2y-2z=0 & L_1 \\ x-2y-z=0 & L_2 \\ 3x-2y-3z=0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-y-z=0 \\ y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ z=x \end{cases}$$

D'où $\mathrm{Ker}(f-2Id_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Vect}((1,0,1))$

* Comme $\dim\mathrm{Ker}(f)+\dim\mathrm{Ker}(f-Id)+\dim\mathrm{Ker}(f-2Id)=3$,

f est diagonalisable.

Notons $\varepsilon_1=(1,1,1)$

$\varepsilon_2=(0,1,-1)$

$\varepsilon_3=(1,0,1)$

$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\mathcal{E}$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)=D$.

3. * $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$ vérifie $A=PDP^{-1}$.

* Calculons P^{-1}. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$$Y=PX \iff \begin{cases} x \quad +z=a \\ x+y \quad =b \\ x-y+z=c \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad +z=a \\ y-z=b-a \\ -y \quad =c-a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=a-z=-a+b+c \\ z=y+a-b=2a-b-c \\ y=a-c \end{cases} \iff X=P^{-1}Y \text{ où}$$

D'où $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}$

⚠ Ordre des lignes

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$A^n = (PDP^{-1})^n$

$= PDP^{-1}.PDP^{-1}.\ldots.PDP^{-1}$

$= PD^nP^{-1}$ (simplifications en cascades)

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ } Si $n=0$, $D^n = I_3 \ldots$

$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n & -2^n \\ 1 & 0 & -1 \\ -1+2^{n+1} & -2^n & 1-2^n \end{pmatrix}$

5. Notons $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

Alors : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

Par réc. immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$X_n = A^n.X_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n & -2^n \\ 1 & 0 & -1 \\ -1+2^{n+1} & -2^n & 1-2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 1 \\ -1+2^{n+1} \end{pmatrix}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{x_n = 2^{n+1},\ y_n = 1,\ z_n = -1+2^{n+1}}$

Exercice 7

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = A - I_3 = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. $rg(B) = 1$ donc $\dim Ker(B) = 2$

$B.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$ donc $9 \in Spec(B)$.

$3 \leq \dim Ker(B) + \dim Ker(B - 9I) \leq 3$

d'où $\dim Ker(B) + \dim Ker(B-9I) = 3$: $Spec(B) = \{0, 9\}$.

2.

$\lambda \in Spec(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_3$ non inversible

$\Leftrightarrow A - I_3 - (\lambda - 1)I_3$ non inversible

$\Leftrightarrow B - (\lambda-1)I_3$ non inversible

$\Leftrightarrow \lambda - 1 \in Spec(B)$

D'où $Spec(A) = \{1, 10\}$.

3. $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 10.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\Delta = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifient $\underline{A = P\Delta P^{-1}}$

Exercice 8 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. A est triangulaire supérieure donc $Spec(A) = \{2, 0, 1\}$.

Comme $A \in M_3(\mathbb{R})$ et possède trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable :

$\exists P \in Gl_3(\mathbb{R}) \,/\, A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi A et D sont semblables.

2. Cherchons un polynôme annulateur de D.

$D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cherchons $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, D^3 = \alpha D + \beta D^2$:

$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 8 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2 - 2\beta + 4\beta = 8 \\ \alpha = 1 - \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 3 \\ \alpha = -2 \end{cases}$

Ainsi $D^3 = -2D + 3D^2$: le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 2X$ est annulateur de D.

Comme A et D sont semblables : il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$ telles que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = D$.

Comme $P(D) = 0$, on a aussi $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et donc $P(A) = 0$:

$P = X^3 - 3X^2 + 2X$ est annulateur de A.

Exercice 9

1. * Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Comme $\deg(f(P)) \leq 2$ on a bien $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$.

* Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors :

$\begin{cases} (1 - X + X^2) P_1 = (1 + X^3) Q_1 + f(P_1) & (1) \\ (1 - X + X^2) P_2 = (1 + X^3) Q_2 + f(P_2) & (2) \end{cases}$

donc

$(1 - X + X^2)(\alpha P_1 + P_2) = (1 + X^3)(\alpha Q_1 + Q_2) + (\alpha f(P_1) + f(P_2))$

en calculant $\alpha . (1) + (2)$

Comme $\deg(\alpha f(P_1) + f(P_2)) \leq \max(\deg(f(P_1)), \deg(f(P_2)))$
≤ 2

Ex. 9 (suite)

. $\alpha f(P_1)+f(P_2)$ est le reste dans la division euclidienne de $(1-X+X^2).(\alpha P_1+P_2)$ par $(1+X^3)$ donc

$\underline{f(\alpha P_1+P_2)=\alpha f(P_1)+f(P_2)}$ et f est linéaire

Bilan : $f\in\mathcal{L}(E)$.

2. (a)

* Si $P=1$:

$$(1-X+X^2).1=(1+X^3).0+\underbrace{(1-X+X^2)}_{\deg\leq 2}$$

donc $\underline{f(1)=1-X+X^2}$.

* Si $P=X$:

$$\begin{aligned}(1-X+X^2).X&=X-X^2+X^3\\&=(1+X^3)-X^2+X-1\\&=(1+X^3).1+\underbrace{(-1+X-X^2)}_{\deg\leq 2}\end{aligned}$$

donc $\underline{f(X)=-1+X-X^2}$

* Si $P=X^2$:

$$\begin{aligned}(1-X+X^2).X^2&=X^2-X^3+X^4\\(1-X+X^2).X^2&=(X^3+1)(X-1)-X+1+X^2\\&=(X^3+1).(X-1)+\underbrace{(1-X+X^2)}_{\deg\leq 2}\end{aligned}$$

donc $\underline{f(X^2)=1-X+X^2}$

On a bien $\underline{f(1)=-f(X)=f(X^2)}$

(b) $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}(f(1),f(X),f(X^2))$
$=\operatorname{Vect}(1-X+X^2)$.

la famille $(1-X+X^2)$ est génératrice et libre car formée d'un seul polynôme non nul : c'est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

(c) Th. du rang : $\dim\operatorname{Ker}(f)=\dim\mathbb{R}_2[X]-\dim\operatorname{Im}(f)$
$=3-1$
$=2$

Or $f(1)=-f(X)\Leftrightarrow f(1+X)=0$
$f(1)=f(X^2)\Leftrightarrow f(X^2-1)=0$

Ainsi : $\begin{cases}1+X,\ X^2-1 \text{ appartiennent à } \operatorname{Ker}(f)\\(1+X,X^2-1) \text{ est libre (degrés} \neq)\\ \operatorname{Card}(1+X,X^2-1)=2=\dim\operatorname{Ker}(f)\end{cases}$

donc $\underline{\text{la famille } (1+X,X^2-1) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f)}$

3. (a) * $P \in \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow P = \alpha \cdot (1 - X + X^2)$

$f(P) = \alpha f(1) - \alpha f(X) + \alpha f(X^2)$

$= 3\alpha f(1)$

$= 3\alpha \cdot (1 - X + X^2)$

* Finalement $f(1 - X + X^2) = 3 \cdot (1 - X + X^2)$

donc 3 est valeur propre de f.

* $\dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f - 3Id) \leq 3$

De plus $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2$ et $\dim \operatorname{Ker}(f - 3Id) \geq 1$.

D'où $\dim \operatorname{Ker}(f - 3Id) = 1$

Comme $\begin{cases} \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f - 3Id) \\ \dim \operatorname{Im}(f) = 1 = \dim \operatorname{Ker}(f - 3Id) \end{cases}$

on a bien $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f - 3Id)$.

(b) $\dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f - 3Id) = 3$

donc f est diagonalisable.

Exercice 10

1. Facile. Notons $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. $f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Donc

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où $A^2 - 2A - 3I_4 = 0$.

Le polynôme $P = X^2 - 2X - 3$ est annulateur de A et donc de f.

4. On cherche les racines de P : $x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16 \quad x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$

Ex. 10 (suite)

· $Spec(f) \subset \{$racines de $P\}$

donc $\underline{Spec(f) \subset \{-1, 3\}}$.

* $f(E_{1,1}) = -E_{1,1}$ donc $E_{1,1} \in Ker(f+Id)$

$\underline{-1 \text{ est valeur propre de } f}$

* Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$A \in Ker(f-3Id) \Leftrightarrow f(A) = 3A$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 3a \\ b-2c = 3b \\ c-2b = 3c \\ -d = 3d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ -2b-2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -b \end{cases}$

Donc

$Ker(f-3Id) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} / b \in \mathbb{R} \right\}$

$= Vect\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$= Vect(E_{21} - E_{12})$

$Ker(f-3Id) \neq \{0\}$ donc $\underline{3 \in Spec(f)}$.

D'où $\underline{Spec(f) = \{-1, 3\}}$

S.* $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique réelle

donc diagonalisable.

* Par conséquent $\underline{f \text{ est diagonalisable}}$.

Exercice 11

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in Spec(M) \iff M - \lambda I$ non inversible.

Méthode des réduites de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 3-\lambda & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda^2+3\lambda-2 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)L_1$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(-\lambda^2+3\lambda-2) \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (-\lambda^2+3\lambda-2)L_2$$

Donc $Spec(M) = \{0, 1, 2\}$. car $-\lambda^2+3\lambda-2=0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$

Comme $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et possède trois valeurs propres distinctes, M est diagonalisable donc f l'est aussi.

Il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: $\exists P$ inversible / $M = PDP^{-1}$

2. Méthode des réduites de Gauss

$$M' - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda-2 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)L_2$

$-\lambda^2+3\lambda-2 = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

D'où $Spec(M') = \{0, 1, 2\}$. Idem 1.

Il existe Q inversible tel que $M' = QDQ^{-1}$

3. D'où

$$M' = Q(P^{-1}MP)Q^{-1}$$
$$= S^{-1}MS \quad \text{où } S = PQ^{-1}$$

M' et M sont semblables.

Exercice 12

1. $E = \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \frac{3}{2} Id_E)$

ssi $\forall u \in E, \exists! (v,w) \in \mathrm{Ker}(f - Id_E) \times \mathrm{Ker}(f + \frac{3}{2} Id_E) /$

$u = v + w$.

Soit $u \in E$.

Analyse : supposons $u = v + w$ où $v \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$

$w \in \mathrm{Ker}(f + \frac{3}{2} Id_E)$

Alors $f(u) = f(v) + f(w)$

$= v - \frac{3}{2} w$.

D'où $\begin{cases} v + w = u \\ v - \frac{3}{2} w = f(u) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} w = u - f(u) \\ v = f(u) + \frac{3}{2} w \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} w = \frac{2}{5} u - \frac{2}{5} f(u) \\ v = f(u) + \frac{3}{5} u - \frac{3}{5} f(u) = \frac{3}{5} u + \frac{2}{5} f(u) \end{cases}$

Synthèse : avec les valeurs de v et w ci-dessus :

- $v + w = u$
- Montrons que $v \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$.

$(f - Id_E)(v) = f(v) - v$

$= \frac{3}{5} f(u) + \frac{2}{5} f^2(u) - \frac{3}{5} u - \frac{2}{5} f(u)$

$= \frac{1}{5} (2f^2 + f - 3 Id_E)(u)$

$= 0$

donc $v \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$.

- On montre aussi que $w \in \mathrm{Ker}(f + \frac{3}{2} Id_E)$.

Bilan : $\forall u \in E, \exists! (v,w) \in \mathrm{Ker}(f - Id_E) \times \mathrm{Ker}(f + \frac{3}{2} Id_E)$

tq $u = v + w$.

D'où $E = \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \frac{3}{2} Id_E)$.

2. Cours !

Exercice 13

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in Sp(A) \Longleftrightarrow A - \lambda I$ non inversible.

Méthode des réduites de Gauss

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5-\lambda \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 2-\lambda & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -3+3\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & -\lambda^2+7\lambda-6 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda-2)L_1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -3+3\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

D'où $\underline{Sp(A) = \{0, 1, 2\}}$

* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ -4y + 6z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = \frac{3}{2} z \end{cases} \qquad Ker(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A-I)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 4z = x \\ 3x - 4y + 12z = y \\ x - 2y + 5z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4z = 0 \\ 3x - 5y + 12z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -4z \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{Donc } Ker(A-I) = Vect\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A-2I)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 4z = 2x \\ 3x - 4y + 12z = 2y \\ x - 2y + 5z = 2z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$Ker(A-2I) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$

où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. (a) Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

$$\Pi A X = \Pi . \lambda X = \lambda \Pi X$$

et $A \Pi X = \Pi A X = \lambda \Pi X$

Par conséquent en notant $Y = \Pi X$, on a $AY = \lambda Y$: Y est un vecteur propre associé à λ. Comme tous les espaces propres sont de dimension 1 ici,

Ex. 13 (suite)

$\cdot\ \exists \alpha \in \mathbb{R} \,/\, Y = \alpha X$.

D'où $MX = \alpha X$: X est un vecteur propre associé à M.

⚠ Question "classique" et difficile !

(b) Par conséquent la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

dont les colonnes sont des vecteurs propres de A est aussi formée de vecteurs propres de M.

Il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$P^{-1} M P = D' = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$$

(c) Montrons que :

M commute avec A $\Leftrightarrow$ la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

$\Rightarrow$: vrai d'après le (b).

$\Leftarrow$: Supposons que $P^{-1}MP = D'$ diagonale.

Alors $AM = PDP^{-1} \cdot PD'P^{-1}$

$= PDD'P^{-1}$

$= PD'DP^{-1}$ car deux matrices diagonales commutent

$= PD'P^{-1}PDP^{-1}$

$= MA$.

Conclusion : $AM = MA \Leftrightarrow$ la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

Rque : nous avons utilisé le fait que tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Exercice 14

1. $E = \mathrm{Vect}(A, B)$

A et B non colinéaires donc (A, B) libre

$\dim(E) = 2$

2 (a) $A^2 = 2A$; $AB = 2B$; $BA = 2B$

$B^2 = A - B$.

(b). * Soit $R_{a,b} \in E$ et $R_{c,d} \in E$.

$$R_{a,b} \cdot R_{c,d} = (aA+bB).(cA+dB)$$
$$= ac\,A^2 + ad\,AB + bc\,BA + bd\,B^2$$
$$= 2ac.A + 2ad\,B + 2bc\,B + bd(A-B)$$
$$= (2ac+bd)A + (2ad+2bc-bd)B$$
$$\in E$$

Donc le produit de deux matrices de E appartient à E.

* Comme $AB = BA$, la multiplication dans E est commutative.

3. (a) $B^2 = A - B$

$$\Rightarrow B^3 = BA - B^2 = 2B - (A-B) = B - A$$

D'où $B^3 + B^2 - 2B = B - A + A + B - 2B = 0$

(b). B est symétrique réelle donc diagonalisable.

(c) Soit X un vecteur propre de B, $X \neq 0$

avec $BX = \lambda X$.

Comme $B^2 = A - B$, on a $A = B + B^2$

donc $AX = BX + B^2X$
$$= \lambda X + \lambda^2 X$$
$$= (\lambda + \lambda^2)X$$ donc X est un vecteur propre de A.

(d) Comme B est diagonalisable, il existe une matrice inversible P dont les colonnes sont formées de vecteurs propres de B, telle que

$B = PDP^{-1}$ où D diagonale.

Cette matrice P est aussi formée de vecteurs propres de A donc $A = PD'P^{-1}$ où D diagonale.

Rque : $P = X^3 + X^2 - 2X$ annulateur de B
$$= X(X^2 + X - 2)$$

$Spec(B) \subset \{-2, 0, 1\}$.

$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B associé à $\lambda = -2$

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ——— à $\lambda = 0$

$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ——— à $\lambda = 1$

D'où $\mathrm{Spec}(B) = \{-2, 0, 1\}$.

D'après les calculs ci-dessus, si $\lambda \in \mathrm{Spec}(B)$ alors $(\lambda + \lambda^2) \in \mathrm{Spec}(A)$

D'où $\mathrm{Spec}(A) = \{2, 0, 2\} = \{0, 2\}$

avec $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$, $\dim \mathrm{Ker}(A - 2I) = 2$.

4.

(a) Notons $P = (X_1 | X_2 | X_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $P^{-1} B P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

D'où

$$P^{-1} M_{a,b} P = P^{-1}(aA + bB) P$$
$$= a P^{-1} A P + b P^{-1} B P$$
$$= a \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2a+2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Spec}(M_{a,b}) = \{-2a+2b, 0, a+2b\}$

$M_{a,b}$ est diagonalisable !

(b) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $0 \in \mathrm{Spec}(M_{a,b})$ donc aucune matrice de E n'est inversible.

Exercice 15 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = 0$

(b) Supposons A inversible.

Alors $A^{-1} \cdot A^3 = 0 \Leftrightarrow A^2 = 0$

d'où $A^{-1} \cdot A^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$: absurde !

Donc A n'est pas inversible.

Ainsi $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$ et $0 \in \mathrm{Spec}(A)$.

(c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $Ker(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $Ker(A)$.

(d) le polynôme $P = X^3$ est annulateur de A.

Donc $Spec(A) \subset \{0\}$.

On sait déjà que $0 \in Spec(A)$ donc $\underline{Spec(A) = \{0\}}$.

Supposons A diagonalisable.

Alors il existe une matrice inversible P telle que

$A = PDP^{-1}$ où $D = Diag(0,0,0) = 0$

$= P.0.P^{-1}$

$= 0$: absurde !

Donc A n'est pas diagonalisable.

(Enchaînement archi-classique...)

2. (a) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$\Pi(a).\Pi(b) = (I + 2aA + 2a^2A^2)(I + 2bA + 2b^2A^2)$

$= I + 2bA + 2b^2A^2 + 2aA + 4abA^2 + 2a^2A^2$ car $A^3 = 0$

$= I + (2b + 2a)A + (2b^2 + 4ab + 2a^2)A^2$.

(b). $\Pi(a).\Pi(b) = I + 2(a+b)A + 2(a+b)^2A^2$

$= \Pi(a+b) \in E$.

Donc E est stable par produit.

(c) On remarque que $\Pi(0) = I_3$.

D'où $\Pi(a).\Pi(-a) = \Pi(0) = I_3$:

$\Pi(a)$ est inversible et $(\Pi(a))^{-1} = \Pi(-a)$

3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) Soit X un vecteur propre de A ($X \neq 0$), associé à la vp λ.

$\Pi(a)X = X + 2aAX + 2a^2A^2X$

$= X + 2\lambda aX + 2\lambda^2a^2X$

$= (1 + 2a\lambda + 2a^2\lambda^2)X$

donc X est un vecteur propre de $\Pi(a)$.

(b) $(\Pi(a)-I)^3 = \Pi(a)^3 - 3\Pi(a)^2 + 3\Pi(a) - I$

$$= \Pi(3a) - 3\Pi(2a) + 3\Pi(a) - I$$

d'après la relation du 2.(b)

$$= I + 6aA + 18a^2A^2 - 3(I+4aA+8a^2A^2)$$
$$+3(I+2aA+2a^2A^2) - I$$
$$= 0$$

Donc le polynôme $P = (X-1)^3$ est annulateur de $\Pi(a)$.

D'où $\mathrm{Spec}(\Pi(a)) \subset \{1\}$.

Comme $0 \in \mathrm{Spec}(A)$: $\exists X \neq 0 \,/\, AX = 0$.

Alors $\Pi(a)X = X + 2aAX + 2a^2A^2X = X$

donc $1 \in \mathrm{Spec}(\Pi(a))$.

On en déduit que $\underline{\mathrm{Spec}(\Pi(a)) = \{1\}}$

(d) Supposons $\Pi(a)$ diagonalisable : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \,/$

$\Pi(a) = P.I.P^{-1}$ car $\mathrm{Spec}(\Pi(a)) = \{1\}$

$= I$

Or $\Pi(a) = I \iff 2aA + 2a^2A^2 = 0$

$\iff a = 0$ car A et A^2 non colinéaires

Donc $\underline{\Pi(a) \text{ est diagonalisable ssi } a = 0}$

(et dans ce cas $\Pi(a) = I$)

Exercice 16

1. Facile.

2. Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$

$F(1) = 0$

$F(X) = X - a$

$F(X^2) = (X-a).2X = 2X^2 - 2aX$

etc...

$F(X^k) = (X-a).kX^{k-1} = kX^k - kaX^{k-1} \quad \forall k \in [\![1,n]\!]$.

D'où

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2a & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -ka & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & k & \ddots & -na \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

3. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(F)$ est triangulaire supérieure.

Ses valeurs propres sont donc ses coeff. diagonaux :

$\mathrm{Spec}(F) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Comme $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ possède $n+1$ valeurs propres distinctes, A est diagonalisable et chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

4. $\dim \mathrm{Ker}(F) = 1$.

Comme $1 \in \mathrm{Ker}(F)$, on a $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}$.

5. $F(P) = \lambda P \iff (X-a)P' = \lambda P$

$\iff P = \frac{1}{\lambda}(X-a)P'$ car $\lambda \neq 0$ (*)

donc a est racine de P.

D'où : $P = (X-a)^m Q$ où $Q(a) \neq 0$

(et m est l'ordre de la racine a)

(b) (*) donne :

$$(X-a)^m Q = \frac{1}{\lambda}(X-a)\cdot\left[m(X-a)^{m-1}Q + (X-a)^m Q'\right]$$

$$\Rightarrow (X-a)^m Q = \frac{1}{\lambda}\left[m(X-a)^m Q + (X-a)^{m+1} Q\right]$$

$$\Rightarrow \lambda Q = mQ + (X-a)Q'$$

$$\Rightarrow \lambda Q = mQ + (X-a)Q'$$

$$\Rightarrow (\lambda - m)Q(X) = (X-a)Q'(X) \quad (**)$$

c) En évaluant (**) en a :

$(\lambda - m)Q(a) = 0 \Rightarrow \lambda - m = 0$ car $Q(a) \neq 0$

$\Rightarrow \lambda = m$

D'où ensuite $(X-a)Q'(X) = 0$

$\Rightarrow Q'(X) = 0$ car $X - a \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$

Donc Q(X) est constant.

On en déduit que $\mathrm{Ker}(F - \lambda\,\mathrm{Id}) = \{\alpha.(X-a)^\lambda / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}((X-a)^\lambda)$.

6. La famille

$\mathcal{B} = (1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de F.