Corrigé du DM n° 3

Exercice 1 : un exercice sur la trace

1. (a) D'après le cours, l'application tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Ainsi $\text{Im}(tr) \subset \mathbb{R}$ et $\text{Im}(tr)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$.
Ainsi : $\dim(\text{Im}(tr)) \leq \underbrace{\dim(\mathbb{R})}_{=1}$. Donc : $\dim(\text{Im}(tr)) \in \{0, 1\}$.
$tr(I_n) = n \neq 0$. Ainsi $\text{Im}(tr) \neq \{0_{\mathbb{R}}\}$. Ainsi, $\dim(\text{Im}(tr)) \geq 1$.
Bilan : $\boxed{\dim(\text{Im}(tr)) = 1}$
$\text{Im}(tr) \subset \mathbb{R}$ et $\dim(\text{Im}(tr)) = \dim(\mathbb{R})$ donc : $\boxed{\text{Im}(tr) = \mathbb{R}}$

   (b) D'après le théorème du rang,
$$\dim(\ker(Tr)) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(Tr)) = n^2 - 1$$

   (c) Tout d'abord,
$$\dim(\ker(Tr)) + \dim(Vect(I)) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \quad (i)$$
Montrons que $\ker(tr) \cap Vect(I) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}$ en procédant par double inclusion.
   - $\ker(tr)$ et $Vect(I)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\} \subset \ker(tr) \cap Vect(I)$
   - Soit $M \in \ker(tr) \cap Vect(I)$. Montrons que $M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
$M \in Vect(I)$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M = \alpha I$.
$M \in \ker(tr)$ donc $tr(M) = 0$. Ainsi $tr(\alpha I) = 0$ donc $\alpha n = 0$.
$n \neq 0$ donc $\alpha = 0_{\mathbb{R}}$ donc $M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
Ainsi $\ker(tr) \cap Vect(I) \subset \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}$
   - Par double inclusion : $\boxed{\ker(tr) \cap Vect(I) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\} (ii)}$.

   <u>Bilan :</u> d'après (i) et (ii), on a bien $\boxed{\ker(Tr) \oplus Vect(I) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$

2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \text{tr}(M)I$

   (a) **(i) <u>Montrons que f est linéaire .</u>** Soient $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} f(M_1 + \alpha M_2) &= (M_1 + \alpha M_2) + tr(M_1 + \alpha M_2)I \\ &= M_1 + \alpha M_2 + (tr(M_1) + \alpha tr(M_2))\, I \text{ par linéarité de la trace} \\ &= M_1 + tr(M_1)I + \alpha\,(M_2 + tr(M_2)I) \\ &= f(M_1) + \alpha f(M_2) \end{aligned}$$
Donc f est linéaire.
(ii) **<u>Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.</u>**
$\text{Tr}(M) \in \mathbb{R}$ donc, $M + \text{Tr}(M)I$ est une combinaison linéaire des matrices I et M. Ainsi $M + \text{Tr}(M)I \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc $f(M) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
Grâce à (i) et (ii), $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$

   (b) $f(I) = I + tr(I)I = (n+1)I$.
Par ailleurs, $n + 1 \in \mathbb{R}$ et $I \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$
donc $\boxed{n + 1 \text{ est une valeur propre de } f.}$
De plus, I est un vecteur propre pour f associé à la valeur propre $n + 1$.

   (c) Soit $B \in \ker(tr)$.
$f(B) = B + tr(B)I = B$ car $tr(B) = 0_{\mathbb{R}}$.
On a montré que $\dim(\ker(tr)) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) - 1 = n^2 - 1$.
$n \geq 2$ donc $n^2 \geq 4$ donc $\dim(\ker(tr)) \geq 3 > 0$.
Ainsi, il existe une matrice $B_0 \in \ker(tr)$ non nulle.
ainsi $B_0 \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ et $f(B_0) = B_0$.
Donc : $\boxed{1 \text{ est une valeur propre de } f}$.

   (d) On a montré que 1 et $n+1$ sont **des** valeurs propres de f. Par ailleurs, $n+1 \neq 1$.
$1 \in \text{Sp}(f)$ donc $\boxed{\dim(E_{n+1}(f)) \geq 1}$
On a montré que $\forall B \in \ker(tr), \quad B \in E_1(f)$. Ainsi $\ker(tr) \subset E_1(f)$.
Donc $\dim(\ker(tr)) \leq \dim(E_1(f))$. Ainsi $\boxed{\dim(E_1(f)) \geq n^2 - 1.}$
Par somme : $\dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) \geq n^2$.
Donc $\dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) \geq \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.
On a donc fait le plein de valeurs propres.
Par ailleurs, grâce à l'inégalité sur les dimensions des sous-espaces propres :
$$n^2 \leq \dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq \underbrace{\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))}_{=n^2}$$
donc : $\dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$
<u>Bilan :</u>
$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable, } \text{Sp}(f) = \{1, n+1\},\ \dim(E_{n+1}(f)) = 1 \text{ et } \dim(E_1(f)) = n^2 - 1}$

   (e) Comme $0 \notin \text{Sp}(f)$, f est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit J une matrice non nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.
Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \text{tr}(M)J$.
On admet que g est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) $P(g) = gog - 2g + Id_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
Montrons que $gog - 2g + Id_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))}$.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
$$\begin{aligned} \left(gog - 2g + Id_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\right)(M) &= g\,(g\,(M)) - 2g(M) + M \\ &= g\left(M + \underbrace{tr(M)}_{\in\mathbb{R}}J\right) - 2\,(M + tr(M)J) + M \\ &= g\,(M) + tr(M)g\,(J) - M - 2tr(M)J \text{ car } g \text{ est linéaire} \\ &= M + tr(M)J + tr(M)\left(J + \underbrace{tr(J)}_{=0}J\right) - M - 2tr(M)J \\ &= 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Bilan :
$\boxed{\text{le polynôme } X^2 - 2X + 1 \text{ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme } g.}$

(b) $P = X^2 - 2X + 1$ a pour unique racine 1. Comme $\mathrm{Sp}(g) \subset \{\text{racines de } P\}$,
$$\mathrm{Sp}(g) \subset \{1\}$$
Par ailleurs, $g(J) = J$ et J n'est pas la matrice nulle donc 1 est une valeur propre de g. donc $\{1\} \subset \mathrm{Sp}(g)$

Par double inclusion : $\mathrm{Sp}(g) = \{1\}$

Bilan : $\boxed{\text{1 est la seule valeur propre de } g.}$

(c) Montrons par l'aburde que g n'est pas diagonalisable.

On suppose que g est diagonalisable.

g est supposée diagonalisable donc il existe une base $\mathscr{B}''$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans la matrice $H \in \mathscr{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ est diagonale avec sur la diagonale les valeurs propres de g c'est à dire 1.

ainsi $H = I_{n^2}$. Ainsi $g = Id_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. Or on sait que $g(I) = I + nJ$, mais $nJ \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $g(I) \neq I$ Ainsi $g \neq Id_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ ce qui est absurde.

Bilan : $\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable .}}$

(d) Soit F un sous-espace vectoriel de $Ker(Tr)$. Soit $M \in F$. Alors
$$g(M) = M + tr(M).J = M \in F$$
donc F est stable par g.

(e) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $J \in G$. Soit $M \in G$. Alors
$$g(M) = M + tr(M).J \in G$$
car $M \in G$, $J \in G$ et G est stable par combinaison linéaire (c'est un sev).

(f) Comme $tr(J) = 0$, on a $Vect(J) \subset \ker(\mathrm{tr})$. Comme $\dim(\ker(\mathrm{tr})) = n^2 - 1 > 1$ (car $n \geq 2$), il existe bien une matrice B de trace nulle telle que $B \notin Vect(J)$.
Soit $H = Vect(I, B)$. Montrons tout d'abord que la famille (I, B) est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha.I + \beta.B = 0$. Alors, par linéarité de la trace,
$$\mathrm{tr}(\alpha.I + \beta.B) = 0 \Leftrightarrow \alpha.\mathrm{tr}(I) + \beta.\mathrm{tr}(B) = 0 \Leftrightarrow \alpha.n = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$
d'où $\beta.B = 0$. Comme $B \neq 0$, $\beta = 0$.
Ainsi la famille (I, B) est libre, il s'agit donc d'une base de H et H est bien un plan vectoriel.

On raisonne par l'absurde pour montrer que $J \notin H$.
Supposons que $J \in H$. Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $J = \alpha.I + \beta.B$. D'où $\mathrm{tr}(J) = \alpha.n$. Comme J est de trace nulle, $\alpha = 0$. D'où $\beta.B = J$. Mais comme $B \notin Vect(J)$, on a forcément $\beta = 0$. Absurde car J n'est pas nulle.
Ainsi $J \notin H$.

On raisonne par l'absurde pour montrer que H n'est pas stable par g.
Supposons que H est stable par g. Comme $I \in H$, on a $g(I) \in H$. Or
$$g(I) = I + n.J \Leftrightarrow J = \frac{1}{n}.g(I) - \frac{1}{n}.I \in H$$

ce qui est absurde car $J \notin H$.
Ainsi H n'est pas stable par g.

Bilan : $\boxed{H \text{ est un plan vectoriel ne contenant pas } A, \text{ et } H \text{ n'est pas stable par } g}$

Exercice 2 : un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$

1. (a) Soit $f \in E$. Prouver que la fonction $T(f)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer $(T(f))'(x)$ en fonction de f et de x.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $T(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$ existe bien. Ainsi $T(f)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$T(f)(x) = F(x+1) - F(x)$$
Comme F est primitive d'une fonction continue, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On en déduit que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R}, (T(f))'(x) = f(x+1) - f(x)$$

(b) Soit f l'application telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2\pi.x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_x^{x+1} \sin(2\pi.t)dt \\ &= [-\frac{1}{2\pi}.\cos(2\pi.t)]_x^{x+1} \\ &= -\frac{1}{2\pi}.(\cos(2\pi.x + 2\pi) - \cos(2\pi.x)) \\ &= 0 \text{ par périodicité du sinus} \end{aligned}$$
Ainsi $T(f)$ est l'application nulle : $T(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. (a) Soit $(f, g) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha.f + g \in \mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} T(\alpha.f + g)(x) &= \int_x^{x+1} \alpha.f(t) + g(t)dt \\ &= \alpha.\int_x^{x+1} f(t)dt + \int_x^{x+1} g(t)dt \\ &= \alpha.T(f)(x) + T(g)(x) \end{aligned}$$
et on en déduit que $T(\alpha.f + g) = \alpha.T(f) + T(g)$ donc T est linéaire.
D'après ce qui précède, pour tout $f \in E$, $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc $T(f)$ est continue et $T(f) \in E$.

Bilan : $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E}$

(b) En considérant la fonction du 2., $x \mapsto f(x) = \sin(2\pi.x)$, nous avons vu que $T(f) = 0$. Ainsi $f \in \ker(T)$ mais $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$: T n'est pas injective.
Par ailleurs, pour tout $f \in E$, la fonction $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc des fonctions $g \in E$ n'ayant pas d'antécédent sur $\mathbb{R}$: il suffit de prendre une fonction qui est continue mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par exemple la valeur absolue.

3. Soit $F = \mathbb{R}_2[x]$. On rappelle que F est un sous-espace vectoriel de E.

   (a) Soit $P \in F$: il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = at^2 + bt + c$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(P)(x) &= \int_x^{x+1} at^2 + bt + c\ dt \\ &= [\frac{1}{3}a.t^3 + \frac{1}{2}.bt^2 + ct]_x^{x+1} \\ &= \frac{1}{3}a.(x+1)^3 + \frac{1}{2}b.(x+1)^2 + c.(x+1) - \frac{1}{3}.x^3 - \frac{1}{2}bx^2 - cx \\ &= \frac{1}{3}a.(3x^2+3x+1) + \frac{1}{2}b.(2x+1) + c \end{aligned}$$

   et la fonction obtenue est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Ainsi $T(P) \in F$.

   Bilan : $\boxed{F \text{ est stable par } T}$

   (b) Comme F est stable par T, on peut considérer U l'endomorphisme induit par T sur F.
   En reprenant les calculs précédents, on obtient que :

$$U(f_0) = T(f_0) = f_0,\ \ U(f_1) = T(f_1) = f_1 + \frac{1}{2}f_0,\ \ U(f_2) = T(f_2) = f_2 + f_1 + \frac{1}{3}.f_0$$

   Ainsi

$$A = Mat_{\mathcal{C}}(U) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c) Cette matrice A est triangulaire inférieure sans 0 sur la diagonale. Elle est donc inversible et U est bijectif. Ainsi U est un automorphisme de F.
   De plus, cette matrice étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc $Sp(U) = 1$.

   Supposons A diagonalisable. Alors il existerait une matrice inversible P telle que

$$A = P.Diag(1,1,1).P^{-1} = P.I.P^{-1} = I$$

   Absurde car $A \neq I$!!
   Donc A n'est pas diagonalisable.

   Bilan : $\boxed{U \text{ est un automorphisme de } F\text{, mais } U \text{ n'est pas diagonalisable}}$

4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit g_a l'application où $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_a(x) = \exp(ax)$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B} = (g_0, \cdots, g_n)$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre.

   C'est un classique ! Plusieurs méthodes sont possibles (récurrence...). La plus efficace est la suivante.
   Soit $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\alpha_0.g_0 + \cdots + \alpha_n.g_n = 0$$

   Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \alpha_0.e^{0.x} + \alpha_1.e^x + \alpha_2.e^{2x} + \cdots + \alpha_n.e^{nx} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_0.(e^x)^0 + \alpha_1.(e^x)^1 + \alpha_2.(e^x)^2 + \cdots + \alpha_n.(e^x)^n = 0 \\ \Leftrightarrow\ & P(e^x) = 0 \end{aligned}$$

   en notant P le polynôme défini par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \alpha_0 + \alpha_1.t + \cdots + \alpha_n.t^n$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel e^x est racine de P. Le polynôme P a alors une infinité de racines, ce qui implique que $P = 0$.
   Comme un polynôme est nul ssi ses coefficients sont nuls, on obtient enfin que

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

   Bilan : $\boxed{\text{la famille } \mathcal{B} = (g_0, \cdots, g_n) \text{ est libre.}}$

   (b)
   - 1er cas : supposons $a \neq 0$.
     Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(g_a)(x) = [\frac{1}{a}.e^{at}]_x^{x+1} = \frac{1}{a}.(e^{ax+a} - e^{ax}) = \frac{e^a - 1}{a}.e^{ax} = \frac{e^a-1}{a}.g_a(x)$$

     Ainsi $T(g_a) = \frac{e^a-1}{a}.g_a$. On en déduit que g_a est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda(a) = \frac{e^a-1}{a}$.
   - 2ème cas : supposons $a = 0$.
     Alors g_0 est la fonction constante égale à 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(g_0)(x) = \int_x^{x+1} 1\ dt = 1 = g_0(x)$$

     Donc $T(g_0) = g_0$: g_0 est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda(0) = 1$.

   (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède $T(g_k) = \lambda(k).g_k \in H_n$. Par linéarité de T, on en déduit que pour tout $f \in H_n$, on a encore $T(f) \in H_n$: H_n est stable par T.

   (d) Soit h l'application définie sur $\mathbb{R}$, où $h(0) = 1$ et $\forall u \in \mathbb{R}^*$, $h(u) = \frac{e^u-1}{u}$.
   h est continue sur $\mathbb{R}^*$ par quotient. Par équivalence classique $e^u - 1 \sim_{u\to 0} u$, donc $\lim_{u\to 0} h(u) = 1 = h(0)$, donc h est aussi continue en 0.
   Donc h est continue sur $\mathbb{R}$. On obtient sans problème : $\lim_{u\to -\infty} h(u) = 0$, et par croissances comparées $\lim_{u\to+\infty} h(u) = +\infty$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, toutes les valeurs de $]0;+\infty[$ sont atteintes par h.

   On en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un réel a tel que $h(a) = \lambda$. Autrement dit, en considérant la fonction g_a, cette fonction est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda(a) = h(a) = \lambda$.

   Bilan : $\boxed{\forall \lambda \in]0;+\infty[,\ \lambda \in Sp(T)}$

   Nous travaillons en dimension infinie dans cet exercice !!
   Il n'y a donc pas de contradiction avec les résultats du cours, et il est possible d'avoir une infinité de valeurs propres...