DM 4 - corrigé Ex.2

Exercice 2 : Ecricome 2021

Partie 1 : Étude de trois matrices

1. Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -3A$.

   Ainsi $A^3 + 3A = (0)$ donc $X^3 + 3X$ est un polynôme annulateur de A.

   Or $X^3 + 3X = X(X^2 + 3)$ donc 0 est la seule racine réelle de ce polynôme. On sait que les valeurs propres éventuelles de A sont parmi les racines de $X^3 + 3X$. Donc 0 est la seule valeur propre réelle possible de A. On a $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$.

   On remarque que $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, donc 0 est valeur propre de A.

   Finalement $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

   A a une seule valeur propre qui est 0 donc si A est diagonalisable alors A est semblable à la matrice diagonale n'ayant que des 0 sur sa diagonale donc A est semblable à la matrice nulle. Il existe donc une matrice inversible P telle que :

   $$A = P.0.P^{-1} = 0$$

   donc A est la matrice nulle ce qui est absurde. Donc A n'est pas diagonalisable.

2. Les matrices S et J sont symétriques à coefficients réels donc diagonalisables. Le calcul matriciel donne

   $$SJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = JS.$$

3. On sait que S est dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que S a 3 trois valeurs propres donc les sous-espaces propres de S sont de dimension 1. Or tout vecteur non nul d'une droite constitue une base de cette droite. Donc tout vecteur propre de S est une base de son sous-espace propre associé.

   Soit α une valeur propre de S et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, non nul, un vecteur propre de S associé à α. On a donc $Ker(S - \alpha.I_3) = \mathrm{Vect}(X)$. On a $SX = \alpha X$, donc $JSX = SJX = \alpha JX$, donc $(S - \alpha I_3)(JX) = (0)$ donc JX est dans $\mathrm{Ker}(S - \alpha I_3) = \mathrm{Vect}(X)$. Donc JX est colinéaire à X donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $JX = \mu X$. Comme X est non nul, X est vecteur propre de J.

   Remarques :

   (a) JX peut être nul donc même si $S(JX) = \alpha(JX)$, JX n'est pas forcément un vecteur propre de S.

   (b) Une deuxième méthode plus longue consiste à calculer des bases des sous-espaces propres de S et à vérifier que les vecteurs X trouvés sont aussi vecteurs propres de J en calculant JX.

4. On sait que S est diagonalisable et que le spectre de S est formé de $0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$. On pose X_1, X_2, X_3 des vecteurs propres associé respectivement à $0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$. On pose P la matrice contenant X_1, X_2, X_3 comme colonnes. On a alors

   $$S = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ donc } P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

   On sait que (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formé de vecteurs propres de S et donc de vecteurs propres de J donc $P^{-1}JP$ est aussi diagonale.

   Remarque : il est très classique de montrer que $\mathrm{Sp}(J) = \{0, 3\}$.

5. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\ell_1(M)$ est une somme de n réels donc $\ell_1(M) \in \mathbb{R}$.

   Dans la suite, on note $(M)_{i,j}$ le coefficient de M en ligne i et colonne j.

   Soit $\alpha \in \mathbb{R}, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

   $$\begin{aligned} \ell_1(\alpha M + N) &= \sum_{j=1}^{n} (\alpha M + N)_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} (\alpha (M)_{1,j} + (N)_{1,j}) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{n} (M)_{1,j} + \sum_{j=1}^{n} (N)_{1,j} = \alpha \ell_1(M) + \ell_1(N). \end{aligned}$$

   Donc $\ell_1 \in L(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ et ℓ_1 est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. $\mathcal{K}_n = Ker(s)$, donc $\mathcal{K}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n$.

7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a, pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$, $(M)_{i,j} = ({}^tM)_{j,i}$.

   Donc $\ell_i({}^tM) = \sum\limits_{j=1}^{n} ({}^tM)_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{n} (M)_{j,i} = c_i(M)$. De même $c_i({}^tM) = \ell_i(M)$.

   Il est évident que $d_1({}^tM) = d_1(M)$.

   Enfin $d_2({}^tM) = \sum\limits_{i=1}^{n} ({}^tM)_{i,n-i+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} (M)_{n-i+1,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} (M)_{k,n-k+1} = d_2(M)$. On a fait le changement de variables $k = n - i + 1$.

   Ces égalités montrent que si M est magique alors ${}^tM$ l'est aussi et que $s(M) = s({}^tM)$.

8. Avec des coefficients tous égaux à 1, il est clair que J_n est dans $\mathcal{E}_n$ et que $s(J_n) = n$.

   On sait que $\mathcal{E}_n$ est stable par combinaison linéaire donc, pour tout $M \in \mathcal{E}_n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $M - \lambda J_n \in \mathcal{E}_n$.

   On ajuste alors λ afin que $M - \lambda J_n \in \mathcal{K}_n$. Cela équivaut à

   $$\ell_1(M - \lambda J_n) = 0 \Longleftrightarrow \ell_1(M) - \lambda \ell_1(J_n) = 0 \Longleftrightarrow s(M) = \lambda n \Longleftrightarrow \lambda = \frac{s(M)}{n} \in \mathbb{R}.$$

   L'équivalence prouve qu'il existe un et un seul réel λ tel que $M - \lambda J_n \in \mathcal{K}_n$.

9. En faisant le produit MW_n, on obtient la colonne $\begin{pmatrix} \ell_1(M) \\ \ell_2(M) \\ \vdots \\ \ell_n(M) \end{pmatrix}$ qui vaut aussi $s(M)W_n$ donc on a $MW_n = s(M)W_n$. Comme W_n est non nulle, W_n est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $s(M)$.

10. Les sommes par lignes, colonnes et diagonales sont immédiates. On voit que A, J, S sont magiques et que $s(A) = s(S) = 0$ et $s(J) = 3$.

11. Il s'agit d'un résultat très classique d'analyse-synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

    Analyse : Supposons que $M = M_1 + M_2$ avec $M_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique et $M_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ symétrique. Alors

    $${}^tM = {}^t(M_1 + M_2) = {}^tM_1 + {}^tM_2 = -M_1 + M_2$$

    donc $M + {}^tM = 2M_2$ et $M_2 = \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)$ et $M_1 = M - M_2 = \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$.

    Sous réserve d'existence, nous avons montré l'unicité de M_1 et M_2.

    Synthèse : On vérifie ${}^t\left(\frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)\right) = \frac{1}{2}\left({}^tM - M\right) = -\frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$ donc $\frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$ est antisymétrique.

    On a ${}^t\left(\frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)\right) = \frac{1}{2}\left({}^tM + M\right) = \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)$ donc $\frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)$ est symétrique.

    Et $\frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) + \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right) = M$.

    Cela prouve l'existence de $M_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique et $M_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ symétrique telles que $M_1 + M_2 = M$.

    On a aussi l'unicité et $M_1 = \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$ et $M_2 = \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)$.

12. (a) Soit $M \in \mathcal{K}_3(\mathbb{R})$. On a $M \in \mathcal{E}_3(\mathbb{R})$, avec la question 7, on sait que ${}^tM \in \mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ et $s\left({}^tM\right) = s(M) = 0$ donc ${}^tM \in \mathcal{K}_3(\mathbb{R})$.
    Comme $\mathcal{K}_3(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire, on a $M_1 = \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right) \in \mathcal{K}_3(\mathbb{R})$ et $M_2 = \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) \in \mathcal{K}_3(\mathbb{R})$.

    (b) La matrice M_1 est antisymétrique donc ses termes diagonaux sont nuls.
    En effet, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on $({}^tM)_{i,i} = (-M)_{i,i} = -(M)_{i,i}$ et on a aussi par définition de la transposée $({}^tM)_{i,i} = (M)_{i,i}$ donc $-(M)_{i,i} = (M)_{i,i}$ donc $(M)_{i,i} = 0$.
    La somme de M_1 est nulle donc la somme des termes de sa première ligne vaut 0 donc elle est de la forme $L_1 = (0 \quad \alpha \quad -\alpha)$. Par antisymétrie, la première colonne de M_1 est $\begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$. Par somme nulle sur les lignes on en déduit que $L_2 = (-\alpha \quad 0 \quad \alpha)$ et $L_3 = (\alpha \quad -\alpha \quad 0)$. Donc

    $$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha A.$$

    M_2 est symétrique, la somme de sa première ligne vaut 0 donc elle est de la forme $(-a-b \quad b \quad a)$. Par symétrie, la première colonne de M_1 est $\begin{pmatrix} -a-b \\ b \\ a \end{pmatrix}$.

L'antidiagonale est de somme nulle donc

$$M_2 = \begin{pmatrix} -a-b & b & a \\ b & -2a & * \\ a & * & * \end{pmatrix}.$$

La deuxième ligne est de somme nulle donc

$$M_2 = \begin{pmatrix} -a-b & b & a \\ b & -2a & 2a-b \\ a & * & * \end{pmatrix}.$$

Par symétrie

$$M_2 = \begin{pmatrix} -a-b & b & a \\ b & -2a & 2a-b \\ a & 2a-b & * \end{pmatrix}.$$

La troisième ligne est de somme nulle donc

$$M_2 = \begin{pmatrix} -a-b & b & a \\ b & -2a & 2a-b \\ a & 2a-b & -3a+b \end{pmatrix}.$$

La diagonale est de somme nulle donc $-6a = 0$ donc $a = 0$ et

$$M_2 = \begin{pmatrix} -b & b & 0 \\ b & 0 & -b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix} = -bS.$$

On pose $\beta = -b$ et $M_2 = \beta S$.

13. La question 12 assure que toute matrice de $\mathcal{K}_3$ est combinaison linéaire de A et S donc $\mathcal{K}_3 \subset \text{Vect}(A, S)$. La question 10 dit que A et S sont dans $\mathcal{K}_3$ donc $\mathcal{K}_3 = \text{Vect}(A, S)$.

    Les matrices A et S ne sont pas colinéaires donc (A, S) est libre.

    Finalement (A, S) est une base de $\mathcal{K}_3$.

    La question 8 dit que si $M \in \mathcal{E}_3$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M - \lambda J \in \mathcal{K}_3$ donc, il existe des réels α, β tels que $M - \lambda J = \alpha A + \beta S$ donc

    $$M = \lambda J + \alpha A + \beta S.$$

    Donc $\mathcal{E}_3 \subset \text{Vect}(J, A, S)$.

    Comme J, A, S sont dans $\mathcal{E}_3$, on a $\mathcal{E}_3 = \text{Vect}(J, A, S)$. Donc (J, A, S) génère $\mathcal{E}_3$.

    Supposons qu'il existe a, b, c réels tel que $aJ + bA + cS = (0)$. On compose par ℓ_1, on a $a\ell_1(J) + b\ell_1(A) + c\ell_1(S) = a\ell_1(J) = 3a = 0$. Donc $a = 0$ et $bA + cS = (0)$ donc $b = c = 0$ car (A, S) libre. Finalement (A, J, S) est libre et forme une base de $\mathcal{E}_3$.

14. Montrons que Δ est un sous-espace de $\mathcal{E}_3$.

    - Par définition, $\Delta \subset \mathcal{E}_3$.
    - La matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $P^{-1}(0)P = (0)$ donc elle est dans Δ qui n'est pas vide.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}, M \in \Delta, N \in \Delta$. On sait que $P^{-1}MP = D$ et $P^{-1}NP = D'$ sont diagonales donc

$$P^{-1}(\alpha M + N)P = \alpha P^{-1}MP + P^{-1}NP = \alpha D + D'$$

  est diagonale. Donc $\alpha M + N \in \Delta$. Donc Δ est stable par combinaison linéaire.

Finalement Δ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_3$.

La question 4 assure que J et S sont dans Δ. Donc $\text{Vect}(J, S) \subset \Delta$.

Soit $M \in \Delta$, on sait que $M \in \mathcal{E}_3$, on peut poser $M = aA + bJ + cS$ car (A, J, S) est une base de $\mathcal{E}_3$. On sait que $P^{-1}MP = P^{-1}(aA+bJ+cS)P = aP^{-1}AP+bP^{-1}JP+cP^{-1}SP$ est diagonale. Or $bP^{-1}JP + cP^{-1}SP$ est diagonale donc

$$aP^{-1}AP = P^{-1}MP - (bP^{-1}JP + cP^{-1}SP)$$

est diagonale. Notons $aP^{-1}AP = D$, supposons a non nul alors $P^{-1}AP = \frac{1}{a}D$ est diagonale. Cela contredit la question 1. Donc a vaut 0 et $M = bJ + cS$ donc $\Delta \subset \text{Vect}(J, S)$.

Finalement $\Delta = \text{Vect}(J, S)$.