Corrigé de l'épreuve Ecricome 2023

Exercice 1

Partie I

1.

(a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Ces deux matrices étant triangulaires supérieures,

$Sp(AB) = Sp(BA) = \{-1, 2\}$

• Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$X \in Ker(AB+I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y=0$

$\underline{Ker(AB+I) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$

$X \in Ker(AB-2I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y=0$

$\underline{Ker(AB-2I) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$

$X \in Ker(BA+I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y=0$

$\underline{Ker(BA+I) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$

$X \in Ker(BA-2I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x+y=0$

$\underline{Ker(BA-2I) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

2. Soit λ une valeur propre non nulle de AB et X un vecteur propre associé : $ABX = \lambda X$ avec $X \neq 0$.

(a) Supposons que $BX = 0$. Alors $ABX = 0$ donc $\lambda X = 0$ d'où $\lambda = 0$ puisque $X \neq 0$: absurde car on suppose λ non nulle. Donc $\underline{BX \neq 0}$.

(b)

• $BA.BX = B.ABX = B.\lambda X = \lambda BX$.

• De plus $BX \neq 0$ d'après le (a).

Donc $\boxed{\text{BX est un vecteur propre de BA et } \lambda \text{ est une valeur propre de BA.}}$

3. On suppose que 0 est une valeur propre de AB et que X est un vecteur propre associé : $ABX = 0$ et $X \neq 0$.

(a) Supposons B inversible.

Si $BX = 0$ alors $B^{-1}BX = 0$ donc $X = 0$: absurde.

Donc $BX \neq 0$. Comme $BA.BX = B.0 = 0$, on a bien $\underline{0 \in Sp(BA)}$.

(b) Supposons B non inversible.

Notons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ les endomorphismes canoniquement associés à A et à B.

Alors $rg(BA) = rg(g \circ f)$
$= \dim Im(g \circ f)$.

Comme $Im(g \circ f) \subset Im(g)$, alors
$\dim Im(g \circ f) \leq \dim Im(g)$
$\Rightarrow rg(BA) \leq rg(B)$.

Comme B n'est pas inversible, $rg(B) < n$.

D'où $\underline{rg(BA) < n}$.

Ainsi BA n'est pas inversible donc $\underline{0 \in Sp(BA)}$

4. Soit $\lambda \in Sp(AB)$.

Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda \in Sp(BA)$ d'après 2.

Si $\lambda = 0$ alors $\lambda \in Sp(BA)$ d'après 3.

D'où $Sp(AB) \subset Sp(BA)$.

Par un argument symétrique, $Sp(BA) \subset Sp(AB)$.

D'où $\boxed{Sp(BA) = Sp(AB)}$

5. L'exemple du 1. montre qu'en général AB et BA n'ont pas les mêmes sous-espaces propres.

<u>Partie 2</u> : $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\underline{AB = BA}$.

6. On suppose qu'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$.

(a) Notons $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$. car ses coefficients ne sont pas tous nuls

Alors $Q(A) = 0$ et $Q \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, avec $\deg(Q) \leq n-1$:

<u>A admet un polynôme annulateur de degré $\leq n-1$.</u>

(b) On sait que $Sp(A) \subset \{$racines de $Q\}$.

Or $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ alors que <u>Q admet au plus $n-1$ racines</u>. Ceci est absurde !

(c) On en déduit que la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre. En effet, soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} = 0$

$\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$

$(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}) \neq (0, \dots, 0)$ est absurde d'après le 6.(a) (b).

Donc $\alpha_0 = \dots = \alpha_{r-1} = 0$ et la famille est bien libre.

7. Soit $\lambda \in Sp(A)$ et X un vecteur propre associé :
$AX = \lambda X$ et $X \neq 0$.

(a) Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et possède n valeurs propres distinctes, tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
Ainsi $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = 1$. Comme $X \neq 0$ et $X \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$, on a bien $\underline{\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \operatorname{Vect}(X)}$.

(b) D'une part, $BAX = B.\lambda X = \lambda BX$
D'autre part, $BAX = ABX$

(c) Comme $ABX = \lambda BX$, on a $BX \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$
donc $\underline{BX \in \operatorname{Vect}(X)}$.
Ainsi $\exists \alpha \in \mathbb{R} \;/\; BX = \alpha X$.

8. On en déduit bien que <u>tout vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B</u> (mais pas associé à la même valeur propre en général !)

<u>Rque</u> : <u>exercice classique de "diagonalisation simultanée"</u>.

9. (a) Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et possède n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable : il existe une base $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ formée de vecteurs propres de A :
$\forall i \in [\![1; n]\!],\ AX_i = \lambda_i X_i$ avec $X_i \neq 0$.
D'après le 8., les vecteurs X_i sont aussi des vecteurs propres de B.

(b) $\forall i \in [\![1; n]\!]$, on note $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $BX_i = \mu_i X_i$
Alors $\forall i \in [\![1; n]\!]$,

$$ABX_i = A.\mu_i X_i = \mu_i AX_i = \lambda_i \mu_i X_i \text{ avec } X_i \neq 0.$$

D'où $\{\lambda_i \mu_i \;/\; i \in [\![1; n]\!]\} \subset Sp(AB)$
Comme $\operatorname{Card}(Sp(AB)) \leq n$, on a bien

$$\boxed{Sp(AB) = \{\lambda_i \mu_i \;/\; i \in [\![1; n]\!]\}}$$

10.

(a) Soit $f : P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$.
$\mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$

* On montre facilement que f est linéaire (à faire !)

* Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(P) = 0$

$\iff \forall i \in [\![1;n]\!],\ P(\lambda_i) = 0.$

Or le seul polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ayant n racines deux à deux distinctes est le polynôme nul donc

$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

D'où $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$: f est injective.

De plus $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n = n$ donc f est bijective.

<u>Bilan</u> : f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

P vérifie : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ BX_i = P(\lambda_i)X_i$

$\iff \forall i \in [\![1;n]\!],\ P(\lambda_i)X_i = \mu_i X_i$

$\iff \forall i \in [\![1;n]\!],\ P(\lambda_i) = \mu_i$ (car $X_i \neq 0$)

$\iff f(P) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$

<u>Comme f est bijective de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$, il existe bien un unique polynôme P tel que</u>

<u>$\forall i \in [\![1;n]\!],\ BX_i = P(\lambda_i)X_i$</u>

(c) Notons encore $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ les endomorphismes canoniquement associés à A et à B.
Notons $(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^n$ correspondant à $(X_1, \dots, X_n)$.

Notons aussi $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$.

On a $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $g(x_i) = P(\lambda_i)x_i$; $f(x_i) = \lambda_i x_i$

et $P(f)(x_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot \lambda_i^k \cdot x_i$ (classique)

$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k\right) \cdot x_i = P(\lambda_i)\, x_i.$

Ainsi $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $P(f)(x_i) = g(x_i)$.

les aplications g et $P(f)$ coïncident sur la base $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, elles sont donc égales :

$g = P(f)$.

D'où matriciellement, $\boxed{B = P(A)}$

11. (a) $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AB = BA\}$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

classique !

Il s'agit du <u>commutant de A</u>.

(b)

* Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k X^k$.

Alors $A \cdot P(A) = A \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k A^{k+1}$

$= P(A) \cdot A$

Donc $\{P(A) / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\} \subset \mathcal{C}(A)$.

* D'après le 10., si B commute avec A alors il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

Donc $\mathcal{C}(A) \subset \{P(A) / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$

<u>Bilan</u> : $\mathcal{C}(A) = \{P(A) / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$

(c) $\mathcal{C}(A) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k / (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \right\}$

$= \mathrm{Vect}(I, A, A^2, \dots, A^{n-1})$.

D'après 6., la famille $(I, A, \dots, A^{n-1})$ est <u>libre</u>.

D'où enfin $\boxed{\dim \mathcal{C}(A) = n}$

Exercice 2

1. $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$ donc f est bijective :

<u>f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.</u>

2. (a) Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

h est symétrique ssi $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle h(x), y\rangle = \langle x, h(y)\rangle$

(b) ${}^tA = A$ car f est symétrique. En effet :

$({}^tA)_{i,j} = A_{j,i} = \langle f(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, f(e_i)\rangle$

$= \langle f(e_i), e_j\rangle = A_{i,j}$ (ou directement "d'après le cours")

(c) Comme A est symétrique : A est orthodiagonalisable :

il existe une matrice P <u>orthogonale</u> telle que

${}^tPAP = D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$