

Chapitre 6 - Variables aléatoires réelles discrètes

I. Généralités sur les variables aléatoires

I.1) Définitions

Définition I.1

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire réelle** (VAR) toute application X définie sur Ω vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \in \mathbb{R}$
- $\forall t \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}$

Pour tout réel t , l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq t\}$ sera noté $(X \leq t)$ ou $[X \leq t]$.

Remarque

- Une variable aléatoire est définie indépendamment de la probabilité utilisée.
- Une variable aléatoire X va de Ω vers \mathbb{R} . On note $X(\Omega)$ son ensemble image c'est à dire l'ensemble de toutes les valeurs que l'application X peut atteindre lorsque l'on effectue l'expérience.

Définition I.2

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire réelle discrète** (VARD) toute application X définie sur Ω vérifiant les deux propriétés suivantes :

- X est une variable aléatoire réelle.
- $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable

Définition I.3

Soit X une variable aléatoire réelle de l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}) .

Pour tout intervalle I de \mathbb{R} , l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}$ est un événement, noté $[X \in I]$.

Remarque

Si X est une variable aléatoire réelle alors pour intervalle J de \mathbb{R} , l'ensemble $(X \in J)$ est un événement. Les ensembles $(X = 2)$, $(X \leq 3)$, $(X \geq 0)$... sont des événements.

Théorème I.1

Sommes, produits, Max et min de VAR (Admis)

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}) ,

alors $X + Y$, $X \times Y$, $Max(X, Y)$, $Min(X, Y)$ sont des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}) .

I.2) Variable aléatoire $g(X)$

Définition I.4

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

Soit X une variable aléatoire et g une fonction continue sur $X(\Omega)$ et à valeur dans \mathbb{R} .

On note : $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = g(X(\omega))$

Y est alors une variable aléatoire réelle que l'on notera $Y = g(X)$.

Définition I.5

Variable certaine

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note : $X : \omega \mapsto a$
 $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

X est une variable aléatoire réelle discrète sur (Ω, \mathcal{A}) appelée **la variable aléatoire certaine égale à a** .

$$X(\Omega) = \dots$$

Définition I.6

Variable indicatrice d'un événement

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement.

On note :

$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

L'application X est une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}) appelée **la variable aléatoire indicatrice de l'événement A** . et se note $\mathbb{1}_A$.

$$\mathbb{1}_A(\Omega) = \mathbb{1}_A \text{ vaut}$$

I.3) Les variables aléatoires réelles discrètes

Soit X une variable aléatoire discrète.

Si $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est une variable aléatoire discrète finie.

On notera alors $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Si $X(\Omega)$ est infini, on dit que X est une variable aléatoire discrète infinie.

On notera alors $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$.

Remarque

Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}) , les variables $X + Y$, $X \times Y$, $Max(X, Y)$, $min(X, Y)$ sont des variables aléatoires réelles discrètes sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}) .

Définition I.7

SCE associé à une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire **discrète** sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

La famille d'événements $([X = k])_{k \in X(\Omega)}$ est un **système complet d'événements**.

II. Indépendance de VAR

II.1) Définition

Définition II.1

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .
On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** lorsque :
pour tout couple de réels (x, y) les événements $(X \leq x)$ et $(Y \leq y)$ sont indépendants.

On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** lorsque :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)] = P(X \leq x).P(Y \leq y)$$

II.2) Indépendance de variables aléatoires réelles discrètes

Proposition II.1

Caractérisation de l'indépendance pour des v.a.r. discrètes

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P)
 X et Y sont indépendantes **si et seulement si**

$$\forall (k, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad P([X = k] \cap [Y = j]) = P([X = k]) \times P([Y = j])$$

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

1. Déterminer la probabilité de l'événement $(X = Y)$.
2. Calculer $P(X \leq Y)$.
3. Calculer $P(X + Y = 5)$.

II.3) Cas de n variables mutuellement indépendantes

Définition II.2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires définies le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On dit que les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes lorsque pour toute n -liste (x_1, \dots, x_n) de réels
les événements $(X_1 \leq x_1), (X_2 \leq x_2), \dots, (X_n \leq x_n)$ sont mutuellement indépendants.

Autrement dit : les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes lorsque

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ pour tout partie } J \text{ de } \llbracket 1, n \rrbracket, P\left[\bigcap_{i \in J} (X_i \leq x_i)\right] = \prod_{i \in J} P(X_i \leq x_i)$$

II.4) Lemmes de coalition

Théorème II.1

Coalition première version

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Si les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes

alors toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, \dots, X_j est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{j+1}, X_{j+2}, \dots, X_n$.

Théorème II.2

Coalition deuxième version

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} .

Si les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes **alors** les variables aléatoires $g(X_1), g(X_2), \dots, g(X_n)$ sont mutuellement indépendantes

III. Fonction de répartition d'une V.A.R.

III.1) Définition

Définition III.1

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On appelle **fonction de répartition de la variable aléatoire** X la fonction notée F_X définie sur \mathbb{R} par

$$F_X : t \mapsto F_X(t) = P(X \leq t) \\ \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

III.2) Exemples

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$. Expliciter sa fonction de répartition et tracer la courbe de F_X .
2. Soit X une variable aléatoire réelle certaine égale à a . Donner la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.
3. Soit A un événement. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X indicatrice de A et tracer sa courbe.

III.3) Propriétés universelles d'une fonction de répartition

Théorème III.1

On considère un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et X une variable aléatoire sur cet espace probabilisé.

On note F_X sa fonction de répartition.

- **monotonie** : F_X est croissante sur \mathbb{R}
- **limites** : $\lim_{t \rightarrow -\infty} (F_X(t)) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} (F_X(t)) = 1$
- **continuité à droite en tout point** : F_X est continue à droite en tout réel.
- Pour tout réel a , $\lim_{t \rightarrow a^+} (F_X(t)) = F_X(a)$
- Pour tout réel a , $\lim_{t \rightarrow a^-} (F_X(t)) = F_X(a) - P(X = a)$

III.4) Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Si X est une variable aléatoire réelle **discrète** alors sa fonction de répartition est continue en tout point a de $\mathbb{R} \setminus X(\Omega)$.

Soit X une variable aléatoire réelle **discrète** infinie dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) telle que

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ avec $x_i < x_{i+1}$

Alors pour tout i de I , F_X est constante sur $[x_i, x_{i+1}[$.

III.5) Caractérisation d'une fonction de répartition (HP)

Théorème III.2

On considère un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur \mathbb{R} .

Si la fonction F vérifie les trois propriétés suivantes :

- ① F est une fonction continue à droite en tout réel.
- ② F est une fonction croissante sur \mathbb{R} .
- ③ $\lim_{t \rightarrow -\infty} (F(t)) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} (F(t)) = 1$

alors F est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire réelle X sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

III.6) Une nouvelle catégorie de variables aléatoires : les variables aléatoires à densité (cf chapitre suivant)

Définition III.2

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On dit que X est **une variable aléatoire à densité** lorsque sa fonction de répartition vérifie les deux propriétés suivantes :

- la fonction de répartition de X est une **fonction continue sur \mathbb{R}**
- la fonction de répartition de X est une **fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}** sauf éventuellement en un nombre fini de points.

III.7) Les trois catégories de variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On distingue alors trois catégories de variables aléatoires .

catégorie 1 :

On dira que X est **une variable aléatoire à densité** dans le cas où sa fonction de répartition F_X vérifie les deux propriétés suivantes

- F_X est une fonction continue sur \mathbb{R} ④
- F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} - E$ où E est un ensemble fini de nombres réels. ⑤

Exemple de graphe de F_X :

catégorie 2 :

On dira que X est **une variable aléatoire discrète** lors que l'ensemble $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable.

X est **discrète** si sa fonction de répartition F_X est une fonction en escalier ⑥

Exemple de graphe de F_X :

catégorie 3 :

Il existe d'autres catégories de variables aléatoires ! Elles ne font pas parties du programme officiel mais on peut occasionnellement tomber sur une variable aléatoire qui n'est ni discrète, ni à densité.

Exemple de graphe de F_X :

IV. Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

IV.1) Détermination de la loi d'une v.a.r.d. discrète

Définition IV.1

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Déterminer la loi de la variable aléatoire discrète X revient à faire les deux choses suivantes :

- déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ;
- calculer $P([X = k])$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n jetons dont un seul est blanc. On effectue n tirages successifs et sans remise d'un jeton dans cette urne.

On note X le numéro du tirage auquel on obtient le jeton blanc. Déterminer la loi de X .

Remarque

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Si X est une variable aléatoire discrète finie alors $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.

Si X est une variable aléatoire discrète infinie alors la série de terme général $P(X = k)$ converge et $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$

Ceci permet parfois de vérifier ses calculs, ou de déterminer une valeur inconnue de $P(X = k)$ (souvent $P(X = 0)$...) si l'on connaît les autres.

Proposition IV.1

Caractérisation d'une loi

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé .

Cas 1 : Soit (a_1, \dots, a_n) une n -liste de réels positifs tels que $\sum_{k=1}^n a_k = 1$.

Il existe alors une variable aléatoire X réelle discrète sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) telle que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k = P(X = k)$.

Cas 2 : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 1$.

Il existe alors une variable aléatoire X réelle discrète sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) telle que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = P(X = k)$.

Lien entre la fonction de répartition et la loi

Cas où $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

Soit X une variable aléatoire X réelle discrète de l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (P(X = n)) = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_X(n) = P(X \leq n) = \dots$

Les différentes formules à savoir retrouver très vite :

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $P(X = k)$ en fonction des probabilités $(P(X \leq n))_{n \in \mathbb{N}}$.
 $P(X = k) =$
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $P(X = k)$ en fonction des probabilités $(P(X \geq n))_{n \in \mathbb{N}}$.
 $P(X = k) =$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $P(X = k)$ en fonction des probabilités $(P(X > n))_{n \in \mathbb{N}}$.
 $P(X = k) =$
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $P(X = k)$ en fonction des probabilités $(P(X < n))_{n \in \mathbb{N}}$.
 $P(X = k) =$

Cas général

Pour toute variable aléatoire réelle discrète X où $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et I une partie de \mathbb{N} ,

$$\text{pour tout réel } x, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ x_i \in X(\Omega)}} P(X = x_i).$$

Remarque

Si des variables aléatoires réelles discrètes admettent la même fonction de répartition alors elles ont la même loi.

Si des variables aléatoires réelles discrètes admettent la même loi alors elles ont la même fonction de répartition.

IV.2) Avoir la même loi

Définition IV.2

Dans le cas général

Soient X et Y des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On dit que les variables aléatoires X et Y ont la même loi lorsqu'elles ont la même fonction de répartition, c'est à dire lorsque $\forall t \in \mathbb{R} \quad P(X \leq t) = P(Y \leq t)$.

Remarque

Attention !!! des variables peuvent avoir la même loi sans être égales.

Définition IV.3

Dans le cas discret

Soient X et Y des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On suppose que les variables X et Y sont **discrètes**. Les variables aléatoires X et Y ont la même loi lorsque :

- $X(\Omega) = Y(\Omega)$
- $\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = P(Y = k)$

Remarque

Soient X et Y des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Si les variables aléatoires X et Y sont des variables discrètes admettant la même loi et si g est une fonction définie et continue sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans \mathbb{R} alors les variables $g(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires réelles discrètes admettant la même loi.

IV.3) Loi de $X+Y$ pour des variables discrètes : produit de convolution discret

Proposition IV.2

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On note $Z = X + Y$.

Alors :

$$\forall k \in Z(\Omega), \quad P([Z = k]) = P(X + Y = k) = \sum_{\substack{j \in X(\Omega) \\ k-j \in Y(\Omega)}} P([X = j] \cap [Y = k - j])$$

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , telles que X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$ et Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Déterminer la loi de $X + Y$.

IV.4) Loi de $Inf(X, Y)$ et $Sup(X, Y)$ pour des v.a.r.d. indépendantes:

IV.4.1 Loi de $Sup(X, Y)$

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P)

Soit $Z = Sup(X, Y)$. Autrement dit, $\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = Max(X(\omega), Y(\omega))$.

Si X et Y sont **indépendantes** alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} F_Z(t) &= \dots \\ F_Z(t) &= \dots \end{aligned}$$

IV.4.2 Loi de $inf(X, Y)$

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P)

On note $T = inf(X, Y)$. Autrement dit, $\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = min(X(\omega), Y(\omega))$.

Si X et Y sont **indépendantes** alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} F_T(t) &= \dots \\ F_T(t) &= \dots \end{aligned}$$

Exemple

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On suppose que X et Y suivent une loi géométrique de paramètres respectifs $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

- Déterminer $P(X \geq k)$ et $P(Y \geq k)$ en fonction de k , pour tout entier naturel k .
- Déterminer la loi de $Sup(X, Y)$
- Déterminer la loi de $inf(X, Y)$

V. Les VAR discrètes usuelles

V.1) Loi uniforme

V.1.1 Un exemple

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On pioche un jeton au hasard.

On note X le numéro du jeton obtenu. Déterminer la loi de X .

V.1.2 Loi uniforme sur $[[1, n]]$

Définition V.1

Soit n un entier naturel non nul. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

On dit que la variable aléatoire X suit **une loi uniforme** sur $[[1, n]]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([[1, n]])$

$$\text{lorsque : } \begin{cases} X(\Omega) = [[1, n]] \\ \forall k \in X(\Omega), \quad P([X = k]) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Théorème V.1

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([[1, n]])$ alors :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

V.1.3 Loi uniforme sur $[[a, b]]$

Définition V.2

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a < b$.

On dit que la variable aléatoire X suit **une loi uniforme** sur $[[a, b]]$ sur Ω et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([[a, b]])$

lorsque :

$$\begin{cases} X(\Omega) = [[a, b]] \\ \forall k \in X(\Omega) \quad P([X = k]) = \frac{1}{b-a+1} \end{cases}$$

A retenir : Pour calculer l'espérance et la variance d'une v.a.r.d. X qui suit une loi uniforme sur $[[a, b]]$, on introduira la variable $Y = X - a + 1$. On montre que Y suit une loi uniforme de support $[[1, b - a + 1]]$, puis on obtiendra l'espérance et la variance de Y . On en déduira l'espérance et la variance de X .

Exemple

Soit Z une v.a.r.d. suivant une loi uniforme de support $[-7, 2]$.

Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z , puis donner $E(Z^2)$.

V.1.4 Simulation informatique

V.2) Loi de Bernoulli

V.2.1 Variable de Bernoulli

On dit qu'une v.a.r.d. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est **une variable de Bernoulli** lorsque $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

V.2.2 Epreuve de Bernoulli

On appelle **épreuve de Bernoulli** \mathcal{E} toute expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles, le succès ou l'échec et qui n'est effectuée qu'une seule fois.

A chaque épreuve de Bernoulli, on peut associer une variable aléatoire indicatrice de l'événement "succès". Cette variable aléatoire suit alors une loi de Bernoulli.

Par exemple, on lance une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{4}$.

On note S l'événement : "On obtient Pile".

On note $\mathbb{1}_S$ la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient PILE et qui vaut 0 sinon.

V.2.3 Loi de Bernoulli

Définition V.3

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

On dit que la variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suit **une loi de Bernoulli** de paramètre p sur Ω et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ P([X = 0]) = q \\ P([X = 1]) = p \end{cases}$$

Théorème V.2

Soit $p \in]0, 1[$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors :

$$E(X) = p \quad V(X) = pq$$

V.2.4 Simulation informatique

V.3) Loi binômiale

V.3.1 Loi binômiale

Définition V.4

Soit $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

On dit que la variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suit **une loi binômiale** de paramètres (n, p) sur Ω et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ lorsque :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \\ \forall k \in X(\Omega), \quad P([X = k]) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \end{cases}$$

V.3.2 Situation concrète et rédaction type

On reconnaîtra une loi binomiale à chaque fois que l'on pourra justifier et rédiger les trois étapes suivantes:

(i) *Epreuve \mathcal{E} de Bernoulli* : ...

Succès: "..."

(ii) L'expérience est composée de n épreuves \mathcal{E} indépendantes et de même paramètre de succès p .

(iii) La variable X est égale au nombre de réalisations du succès au cours de cette expérience.

On en déduit alors que X suit une loi binômiale de paramètres (n, p) .

Exercice 4

Une urne contient 4 boules vertes, 8 boules rouges et 9 boules blanches. On effectue successivement 10 tirages d'une boule en remettant la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage. On note X_r la variable aléatoire égale au nombre de fois où la couleur rouge apparaît.

On note X_v la variable aléatoire égale au nombre de fois où la couleur verte apparaît.

On note X_b la variable aléatoire égale au nombre de fois où la couleur blanche apparaît.

Déterminer les lois de X_v , X_r et X_b .

Exercice 5

On range au hasard 10 jetons dans trois tiroirs notés T_1 , T_2 et T_3 .

On note, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, X_i la variable aléatoire égale au nombre de jetons rangés dans le tiroir T_i .

Déterminer la loi de X_1 .

Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$?

Théorème V.3

Soit $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors :

$$E(X) = np \quad V(X) = npq$$

Exercice 6

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 0.5)$. Déterminer $E(X^2)$ (il s'agit de son moment d'ordre 2).

V.3.3 Simulation informatique

V.3.4 Loi binomiale de paramètre $(1, p)$ et loi de Bernoulli

Soit X une v.a.r.d. suivant une loi binomiale de paramètres $(1, p)$.
Ecrire la loi de X . Que remarque-t-on ?

A retenir :

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p) \iff X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$$

V.4) Loi géométrique

V.4.1 Un exemple

Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce dont la probabilité d'obtenir pile vaut p .

On effectue une succession illimitée de lancers avec cette pièce.

On note X le rang d'apparition de *Pile* pour la première fois.

1. Montrer que l'événement "on n'obtient jamais pile" est négligeable.
2. Déterminer la loi de X

V.4.2 La loi géométrique

Définition V.5

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Soit $p \in]0, 1[$.

On dit que la variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suit **une loi géométrique** de paramètre p sur Ω et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ lorsque :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall k \in X(\Omega), \quad P([X = k]) = pq^{k-1} \end{cases}$$

V.4.3 Situation concrète et rédaction type

On reconnaîtra une loi géométrique à chaque fois que l'on pourra justifier et rédiger les trois étapes suivantes:

(i) *Epreuve \mathcal{E} de Bernoulli* : ...

Succès: ...

(ii) L'expérience est composée d'une succession illimitée d'épreuves \mathcal{E} indépendantes et de même paramètre de succès p .

(iii) La variable X est égale au rang d'apparition du premier succès.

On en déduit alors que X suit une loi géométrique de paramètres p

Exercice 7

Une urne contient 4 boules vertes, 9 boules rouges et 8 boules blanches. On effectue une succession illimitée de tirages d'une boule en remettant la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage.

On note X_r (respectivement X_v , X_b) la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués pour obtenir une boule rouge (respectivement verte, blanc) pour la première fois.

Déterminer les lois de X_v , X_r et X_b .

Théorème V.4

Soit $p \in]0, 1[$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

V.4.4 Simulation informatique

V.5) Des exercices classiques sur les lois géométriques : $P(X \leq k), P(X < k), \dots$

Soient X et Y deux v.a.r.d. indépendantes suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètres $\frac{1}{3}$.

Soit k un entier naturel.

1. Calculer $P([X > k])$.
2. En déduire $P([X \leq k])$.
3. Calculer $P(X = Y)$.
4. Calculer $P(X \geq Y)$.

V.6) Loi de Poisson

V.6.1 Introduction

Il n'y a pas de modèle mathématique simple permettant de mettre en évidence une loi de Poisson.

Elle correspond toutefois à de nombreuses situations comme par exemple, le nombre de voitures passant à un péage pendant une durée donnée, le nombre de clients passant à une caisse donnée durant une heure donnée...

V.6.2 La loi de Poisson

Définition V.6

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.

On dit que la variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suit **une loi de Poisson** de paramètre λ sur Ω et on note

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \text{ lorsque : } \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in X(\Omega), \quad P([X = k]) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{cases}$$

Théorème V.5

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors : $E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda$

Exemple

On suppose que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(60)$.

Préciser la loi de Y , son espérance sa variance et son moment d'ordre 2.

V.6.3 Simulation informatique

VI. Théorèmes de stabilité pour la somme

VI.1) Stabilité pour les lois binômiales

VI.1.1 Lois binômiales

Théorème VI.1

Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires réelles définies sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .
Soient $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ et $p \in]0, 1[$.

Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$, si $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ et si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes

alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$

Formule à comprendre

Exemple

Soit X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(60, 0.25)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(40, 0.25)$.
Déterminer la loi de $X + Y$.

Théorème VI.2

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$.

Soient X_1, X_2, \dots, X_m une famille de m variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Si $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$

et si les m variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_m sont mutuellement indépendantes

alors $X_1 + X_2 + \dots + X_m \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2 + \dots + n_m, p)$

VI.1.2 Cas des variables de Bernoulli

Théorème VI.3

Soit r un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit $p \in]0, 1[$.

Soient X_1, X_2, \dots, X_r une famille de r variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Si $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

et si les r variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_r sont mutuellement indépendantes

alors $X_1 + X_2 + \dots + X_r \hookrightarrow \mathcal{B}(r, p)$

VI.1.3 Explosion d'une variable binômiale

Théorème VI.4

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $p \in]0, 1[$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

SI $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ alors il existe m variables aléatoires de Bernoulli définies sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et vérifiant les propriétés suivantes :

- les variables $(X_k)_{k \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ sont mutuellement indépendantes.
- $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
- et $X = \sum_{k=1}^m X_k$.

VI.2) Stabilité pour les lois de Poisson

VI.2.1 Cas de deux variables

Théorème VI.5

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soient $\lambda_1 \in]0, +\infty[$ et $\lambda_2 \in]0, +\infty[$

Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, si $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ et si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes

alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Preuve à savoir refaire

Exemple

Soit X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(40)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(50)$.

Déterminer la loi de $X + Y$.

VI.2.2 Cas de n variables de Poisson

Théorème VI.6

soient m un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in (]0, +\infty[)^m$.

Soient X_1, X_2, \dots, X_m une famille de m variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Si $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$

et si les m variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_m sont mutuellement indépendantes

alors $X_1 + X_2 + \dots + X_m \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)$

VII. Espérance d'une VAR discrète

VII.1) Définition

Définition VII.1

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

- Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on appelle **espérance de la variable aléatoire** X , le réel, noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$$

- Si $X(\Omega)$ est un ensemble infini dénombrable et si la série de terme général $kP(X = k)$ est **absolument** convergente, **alors** on dit que X admet une espérance et on appelle **espérance de la variable aléatoire** X , le réel, noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$$

VII.2) Espérance d'une variable aléatoire réelle à densité

Définition VII.2

Cf chapitre suivant - Je le mets ici car les théorèmes suivants sont valables pour les variables à densité.

Soient X une variable aléatoire **à densité** sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et f_X une densité de X .

On dit que X admet une espérance lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$ est convergente. Dans ce cas, on appelle ce réel **espérance de** X et on note $E(X)$ le réel défini par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$$

VII.3) Linéarité de l'espérance

VII.3.1 Cas de deux variables

Théorème VII.1

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Soient X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

- Si X admet une espérance alors la variable aléatoire $aX + b$ admet une espérance et

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

- Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant une espérance, Alors $aX + bY$ admet une espérance et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

VII.3.2 Cas de n variables

Théorème VII.2

Soient m un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$.

Soient X_1, X_2, \dots, X_m une famille de m variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Si les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_m admettent une espérance, alors $\sum_{k=1}^m a_k X_k$ aussi et

$$E\left(\sum_{k=1}^m a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^m a_k E(X_k)$$

VII.4) Critère de domination

Théorème VII.3

Existence de l'espérance par domination

Soient X et Y des variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Si $0 \leq |X| \leq Y$ et si Y admet une espérance, **alors** X et $|X|$ admettent une espérance et

$$|E(X)| \leq E(|X|) \leq E(Y)$$

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} et α un réel de $[0, 1]$. Justifier que la variable aléatoire α^X admet une espérance

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* qui possède une espérance.

On note $Y = \ln(X)$.

Justifier que la variable aléatoire Y admet une espérance.

idée : inégalité fondamentale de $t \rightarrow \ln(t)$.

VII.5) Inégalité et espérance

VII.5.1 Un cas particulier

Proposition VII.1

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Si X est **positive** c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$ ou $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ et si X admet une espérance, **alors** $E(X) \geq 0$.

Remarque

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et $E(X) = 0$, alors $X = 0$ presque sûrement.

VII.5.2 Croissance de l'espérance

Théorème VII.4

Croissance de l'espérance

Soient X et Y des variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Si X et Y deux variables aléatoires **admettant une espérance**, et si $X \leq Y$ **alors** $E(X) \leq E(Y)$

Remarque

Encore vrai si $X \leq Y$ presque sûrement.

VII.5.3 Cas d'une variable bornée

Théorème VII.5

Espérance d'une variable bornée

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.

Si $a \leq X \leq b$ c'est à dire $X(\Omega) \subset [a, b]$ alors X admet une espérance et $a \leq E(X) \leq b$

VII.6) Formule de transfert pour les variables discrètes

Théorème VII.6

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit g une application de $X(\Omega)$ à valeurs dans \mathbb{R} , c'est à dire $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si X est une variable aléatoire réelle discrète finie alors la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance et $E(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)P(X = k)$.
- Si X est une variable aléatoire réelle discrète infinie alors :
la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $g(k)P(X = k)$ converge absolument.
- Si X est une variable aléatoire réelle discrète infinie et si la série de terme général $g(k)P(X = k)$ converge absolument alors :

$$E(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)P(X = k).$$

Exercice 10

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Montrer que $\frac{1}{1+\lambda}$ admet une espérance et la déterminer.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Montrer que la variable aléatoire $Y = 2 \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor$ admet une espérance et déterminer $E(Y)$.

VII.7) Un peu de vocabulaire

Définition VII.3

- Toute variable aléatoire réelle admettant une espérance nulle est dite **centrée**.
- Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance $E(X)$.
La variable aléatoire $X - E(X)$ est une variable aléatoire réelle discrète centrée appelée **la variable aléatoire centrée associée à X** .

VII.8) Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes

Théorème VII.7

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Si X et Y sont des variables aléatoire discrètes **indépendantes**, admettant une espérance alors XY est une variable aléatoire admettant une espérance et

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

VIII. Conditionnement pour des variables discrètes

VIII.1) Loi conditionnelle

Définition VIII.1

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **discrètes** définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit j un réel de $X(\Omega)$ tel que $P(X = j) \neq 0$.

Déterminer la **loi conditionnelle de Y sachant $(X = j)$** revient à effectuer les deux points suivants:

- Déterminer toutes les valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y , c'est à dire déterminer $Y(\Omega)$.
- Calculer $P_{[X=j]}([Y = k])$ pour tout $k \in Y(\Omega)$

Conséquence :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **discrètes** définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On note $S_X = \{j \in X(\Omega), \text{ tel que } P(X = j) \neq 0\}$.

Grâce à la formule des probabilités totales et au système complet d'événements $([X = j])_{j \in X(\Omega)}$, on obtient:

$$\forall k \in Y(\Omega), \quad P(Y = k) = \sum_{j \in X(\Omega)} P([X = j] \cap (Y = k)) = \sum_{j \in S_X} P_{[X=j]}(Y = k)P([X = j])$$

VIII.2) Espérance conditionnelle

Définition VIII.2

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit A un événement de probabilité non nulle.

On dit que X admet une **espérance conditionnelle sachant A** lorsque X admet une espérance pour la probabilité P_A .

Dans ce cas on la note $E(X/A)$.

Si X admet une espérance conditionnelle sachant A alors

$$E(X/A) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP_A(X = k)$$

Remarque

HP à savoir refaire

Soit A un événement de probabilité non nulle et X une VAR discrète, telle que $E(X)$ existe. Alors $E(X|A)$ existe. En effet : pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P_A(X = k) = \frac{P(A \cap [X = k])}{P(A)} \leq \frac{P(X = k)}{P(A)}$$

donc

$$|kP_A(X = k)| \leq \frac{1}{P(A)}|kP(X = k)|$$

Comme X admet une espérance, la série de t.g. $kP(X = k)$ est absolument convergente. Comme $\frac{1}{P(A)}$ est une constante, par critère de comparaison, la série de t.g. $kP_A(X = k)$ est également absolument convergente et $E(X|A)$ existe.

VIII.3) Formule de l'espérance totale

Théorème VIII.1

Formule de l'espérance totale

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements tel que $\forall n \in \mathbb{N}, P(A_n) \neq 0$.

X admet une espérance
si et seulement si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espérance conditionnelle $E(X|A_n)$ existe.
- la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)E(X|A_n)$ converge.

Dans ce cas,

$$E(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)E(X|A_n).$$

Exercice 11

Soient X et N deux variables aléatoires réelles discrètes telles que N suive une loi de Poisson de paramètre λ et $\forall k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(N = k)$ est une loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, k\}$.

Montrer que X admet une espérance et déterminer son espérance.

Exercice 12

Exercice classique : loi de Poisson suivie d'une loi binomiale

Soit λ un réel strictement positif et $p \in]0, 1[$.

Le nombre de véhicule arrivant sur le périphérique en un jour est une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

On suppose que chaque voiture présente sur le périphérique, a la probabilité p de prendre la sortie "Part-Dieu" et la probabilité $q = 1 - p$ de prendre une autre sortie, et ceci indépendamment des autres voitures. On note Y et Z les variables aléatoires égales respectivement au nombre de véhicules aléatoires respectivement au nombre de véhicules prenant la sortie "Part-Dieu" et au nombre de véhicules prenant une autre sortie en un jour donné.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Y conditionnelle à l'événement $(X = n)$ ainsi que l'espérance conditionnelle $E(Y|(X = n))$.
- (b) Déterminer l'espérance de Y .
- Déterminer la loi de Y , vérifier l'espérance calculée au 1.b
- Quelle est la loi de Z ?
- Y et Z sont-elles indépendantes ?

IX. Moments d'ordre r d'une VARD (HP)

Définition IX.1

Soit r un entier non nul.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P)

On dit que la variable aléatoire réelle X admet un moment d'ordre r quand X^r admet une espérance.

Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre r , alors le réel

$$m_r(X) = E(X^r)$$

est appelé le moment d'ordre r de X .

Proposition IX.1

1. Si X est une variable aléatoire discrète finie, alors X admet un moment à tout ordre et

$$\forall r \in \mathbb{N}, m_r(X) = E(X^r) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^r P(X = k)$$

2. Si X est une variable aléatoire discrète infinie et si X admet un moment d'ordre r , alors

$$\forall r \in \mathbb{N}, m_r(X) = E(X^r) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^r P(X = k) \quad (\text{cette somme est une série})$$

Théorème IX.1

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) et r un entier non nul.

Si X admet un moment d'ordre r alors $\forall k \in [[1, r]]$, X admet un moment d'ordre k .

Proposition IX.2

Soit X une variable aléatoire réelle (discrète ou à densité) sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P)

Alors X admet un moment d'ordre $r \iff$ la variable aléatoire réelle $X - E(X)$ admet un moment d'ordre r

Remarque

En particulier, Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, alors la variable aléatoire réelle $Y = X - E(X)$ admet un moment d'ordre 2.

X. Variance d'une variable aléatoire réelle

Définition X.1

Soit X une variable aléatoire réelle (discrète ou à densité) sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) . On suppose que $E(X^2)$ existe (X admet un moment d'ordre 2).

On appelle **variance de X** et on note $V(X)$ le réel défini par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Théorème X.1

Formule de Koenig-Huygens.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. Alors X admet une variance et

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Théorème X.2

Propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2,
Soit Y une variable aléatoire réelle.

- $V(X) \geq 0$
- pour tout couple de réels (a, b) , $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 \cdot V(X)$$

- $V(X) = 0$ si et seulement si $X = E(X)$ presque sûrement.
- Si X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes** admettant une variance **alors** $X + Y$ admet une variance et

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Si de plus a et b sont deux réels alors

$$V(aX + bY) = a^2 \cdot V(X) + b^2 \cdot V(Y)$$

Définition X.2

Ecart-type

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2.

On appelle **écart-type de la variable aléatoire réelle X** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Interprétation

La variance et l'écart type d'une variable X mesurent la dispersion d'une variable aléatoire autour de sa valeur moyenne.

Définition X.3

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) .

On dit que la variable X est **centrée réduite** lorsque la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 et que :

$$E(X) = 0 \text{ et } \sigma(X) = 1$$

Proposition X.1

Variable centrée réduite associée

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) admettant un moment d'ordre 2. On suppose que $V(X) \neq 0$

La variable aléatoire réelle

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

est une variable aléatoire réelle centrée réduite.

On dit que la variable X^* est **la variable aléatoire réelle centrée réduite associée à X** .