Exercices - Chapitre - Probabilités et VAR discrètes

Exercice 1
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Y est la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue précédemment.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y.
2. (a) Montrer que $\forall k \in [[1,n]]$, $P(Y > k) = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$.
   (b) En déduire $P(Y = k)$ pour tout entier k de $[[2,n]]$.
3. Donner $P(Y = n+1)$, puis donner la loi de Y.

Exercice 2
Une variable sans espérance
On effectue des tirages dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire dans les conditions suivantes:
- Si l'on obtient une boule noire on s'arrête.
- Si l'on obtient une boule blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la boule noire.

1. Déterminer la loi de X, puis vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$.
2. X admet-elle une espérance?

Exercice 3
Un sauteur en hauteur
Un sauteur en hauteur tente de franchir successivement les hauteurs 1, 2, ...,n ,....
Le sauteur réussit toujours à franchir la hauteur 0.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si le sauteur a réussi à franchir les $n-1$ premières hauteurs, sa probabilité de succès à la hauteur n vaut $\frac{1}{n}$.
Le sauteur est éliminé à son premier échec.
On note X la variable aléatoire égale à la hauteur du dernier saut réussi.

1. Trouver la loi de X, puis vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$.
2. Déterminer $E(X+1)$ puis en déduire l'espérance de X. (Réponse $E(X) = e-1$)
3. Calculer $E(X^2-1)$ puis en déduire la variance de X. (Réponse $V(X) = e(3-e)$)

Exercice 4
Une formule à connaître

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[[0,n]]$.
   Montrer que $E(X) = \sum_{k=1}^{n} P([X \geq k])$
2. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} P([X \geq k])$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} kP([X = k])$.
   (a) Montrer que $T_n = S_n - nP([X \geq n+1])$.
   (b) Montrer que si la série de terme général $P([X \geq n])$ converge alors $T_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$, puis que X admet une espérance.
   (c) On suppose que X admet une espérance.
   Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k)$ converge et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k) \geq nP(X \geq n+1)$.
   En déduire que la série de terme général $P([X \geq n])$ converge et que : $\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X \geq k])}$

Exercice 5
Des Tests
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans un lot de n pièces, une pièce est défectueuse. Une machine teste ces pièces, une à une. Elle s'arrête dès qu'elle a détecté la pièce défectueuse. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués par la machine. Déterminer la loi de X, l'espérance de X et sa variance.

Exercice 6
Somme de numéros
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [[1,n]]$.
On pioche une poignée de p jetons dans une boîte contenant n jetons numérotés de 1 à n.
Pour tout entier naturel $k \in [[1,n]]$, on désigne par X_k la variable aléatoire égale à :
$$\begin{cases} X_k = 1 & \text{si le jeton } k \text{ est obtenu} \\ X_k = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X_k pour tout $k \in [[1,n]]$, puis l'espérance et la variance de X_k .
2. Que vaut $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$? Préciser l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
3. On note S la somme des numéros obtenus. Déterminer l'espérance de S et interpréter le résultat dans le cas général, puis dans le cas où $n = 10$ et $p = 5$.

Exercice 7
Théorème de transfert:

1. Soit X une v.a.r suivant une loi $\mathscr{B}(n;p)$. Déterminer l'espérance de $\dfrac{1}{1+X}$. (Réponse $\frac{(1-q^{n+1})}{p(n+1)}$)
2. Même question pour une variable suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.(Réponse $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.)

Exercice 8
Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ de loi de Poisson de paramètre λ strictement positif.
On définit Y de la façon suivante:

- Si X prend une valeur impaire, alors Y prend la valeur 0.
- Si X prend une valeur paire, alors Y prend la valeur $\frac{X}{2}$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que Y admet une espérance et une variance et les déterminer.

Exercice 9
$P(X=Y)$,$P(X<Y)$,$P($"X est paire)"...(Très Classique!!!)
Paul et Camille passent un concours chaque année jusqu'à ce qu'ils réussissent à intégrer une école. La probabilité de réussite de chacun à ce concours vaut $1/3$.
On note X (resp. Y) le nombre d'années nécessaires à Paul (resp. à Camille) pour intégrer. Ils passent leur premier concours la même année .
On suppose que les résultats d'une année à l'autre sont indépendants et que les résultats de Paul sont indépendants des résultats de Camille.

1. Déterminer les lois, les espérances, les variances des variables aléatoires X et Y.
2. Quelle est la probabilité que Camille et Paul intègrent une école la même année?
3. Quelle est la probabilité que Camille intègre avant Paul ?
4. Déterminer la loi de $X+Y$.
5. Camille a-t-elle plus de chances d'intégrer au bout d'un nombre pair ou d'un nombre impair d'années?

Exercice 10
Temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ succès
Soit p un réel tel que $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p.
On effectue une succession illimitée de lancers avec cette pièce.
Pour tout entier naturel i non nul, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'on obtient PILE au cours des i premiers lancers.
Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n la variable aléatoire égale au numéro du lancer pour lequel on obtient PILE pour la $n^{\text{ème}}$ fois.
On admet que X_i et Y_n sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega;\mathscr{A};P)$.

1. Pour tout entier naturel i non nul, déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_i.
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_1.
3. Déterminer $Y_n(\Omega)$.
4. ***Loi de*** Y_2 **:**
   (a) Justifier que $\forall (i,k)\in Y_1(\Omega)\times Y_2(\Omega)$ si $i<k$, alors $P\left([Y_1=i]\cap[Y_2=k]\right)=p^2(1-p)^{k-2}$.
   Que vaut cette probabilité lorsque $i \geq k$?
   (b) Justifier que $\forall k\in Y_2(\Omega)$ $P([Y_2=k])=\sum_{i=1}^{k-1}P([Y_1=i]\cap[Y_2=k])$.
   (c) En déduire que : $\forall k\in Y_2(\Omega)$ $P([Y_2=k])=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$.
   (d) Vérifier que $\sum_{k\in Y_2(\Omega)}P(Y_2=k)=1$
   (e) Calculer combien de lancers il faut effectuer en moyenne pour obtenir pile pour la deuxième fois.
5. ***Loi de*** Y_n **:** On suppose ici que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   (a) Justifier que : $\forall k\in Y_n(\Omega)$ $P(Y_n=k)=pP(X_{k-1}=n-1)$
   (b) En déduire la loi de Y_n.
   (c) Vérifier que l'on obtient le même résultat qu'en 4c pour la loi de Y_2.
6. Ecrire un script en scilab qui simule l'expérience précédente et qui affiche le rang d'apparition de pile pour la $n^{\text{ème}}$ fois lors d'une succession illimitée de lancers avec une pièce dont la probabilité d'obtenir pile vaut p.

Exercice 11
Un produit de convolution discret, Edhec
Soient X,Y,Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
On suppose que les variables X,Y et Z suivent toutes une loi uniforme sur $[[1,n]]$.

1. (a) Montrer que : $\forall k\in[[2,n+1]]$, $P(X+Y=k)=\dfrac{k-1}{n^2}$.
   (b) Montrer que : $\forall k\in[[n+2,2n]]$, $P(X+Y=k)=\dfrac{2n-k+1}{n^2}$.
2. En déduire, grâce à la première question que : $P(X+Y=Z)=\dfrac{n-1}{2n^2}$.

Exercice 12
Loi de $Max(X,Y)$, loi de $Min(X,Y)$, loi de $X+Y$:
On effectue une succession d'expériences aléatoires, consistant à lancer simultanément deux pièces de monnaie A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque lancer, les résultats des deux pièces sont indépendants.
La probabilité d'obtenir pile avec A vaut $a\in]0,1[$ et la probabilité d'obtenir pile avec B vaut $\frac{1}{2}$.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre d'expériences qu'il faut réaliser pour que la pièce A (resp. B) donne face pour la première fois.

1. Déterminer les lois de X et Y, et préciser leur espérance et leur variance.
2. Pour tout entier naturel k non nul, déterminer $P(X\geq k)$ en fonction de k.
   Dans toute la suite de l'exercice, on prendra $a=\frac{1}{3}$.
   On note Z le nombre d'expériences aléatoires qu'il faut faire pour qu'au moins l'une des deux pièces donne face.
3. (a) Exprimer Z en fonction de X et Y.
   (b) Pour tout entier naturel k non nul, déterminer $P(Z\geq k)$
   (c) En déduire que Z suit une loi géométrique et préciser son paramètre.
   On note T le nombre d'expériences qu'il faut effectuer pour que l'on ait eu au moins une fois face avec chaque pièce.
4. (a) Exprimer T en fonction de X et Y.
   (b) Pour tout entier naturel k non nul, déterminer $P(T<k)$
   (c) En déduire que $\forall k\in\mathbb{N}^*$ $P(T=k)=-5\left(\dfrac{1}{6}\right)^k+\left(\dfrac{1}{2}\right)^k+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^k$.
5. (a) Quelle est la probabilité que les pièces A et B donnent "face" pour la première fois lors de la même épreuve ?
   (b) Quelle est la probabilité que la pièce A donne " face " pour la première fois avant la pièce B ?
   (c) En déduire la probabilité que la pièce B donne " face " pour la première fois avant la pièce A.
6. Déterminer la loi de $X+Y$.

AUTOUR DE LA FORMULE DE L'ESPERANCE TOTALE

Exercice 13
On effectue des lancers indépendants d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir le premier PILE.
On note X le numéro du lancer pour lequel le Pile apparaît pour la première fois. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, si le premier PILE est apparu au $n^{\text{ème}}$ lancer, on effectue n lancers indépendants d'un dé équilibré et on note Y le nombre de 6 obtenus.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Y conditionnelle à l'événement $(X=n)$.
   (b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, calculer l'espérance conditionnelle $E(Y|(X=n))$
   (c) Calculer l'espérance de Y si elle existe.
3. Simuler Y à l'aide de Scilab.

Exercice 14
On considère une urne que l'on remplit de la façon suivante : on met une boule blanche, une boule noire puis on lance n fois une pièce équilibrée et on ajoute à l'urne autant de boules blanches que de Pile et autant de noires que de Face. Il y a donc $n+2$ boules dans l'urne.
On effectue après ce remplissage, des tirages, avec remise, d'une boule dans cette urne.
On note F la variable aléatoire égale au nombre de Face obtenus dans les n lancers et X le numéro du tirage auquel on obtient, pour la première fois, une boule noire.

1. Déterminer la loi et l'espérance de F.
2. Soit $k \in [[0, n]]$
   (a) Quelle est la loi de X conditionnelle à $(F = k)$?
   (b) Déterminer $E(X/(F = k))$.
   (c) Montrer que :$\forall k \in [[0, n]]$, $\dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$
   (d) Montrer que X a une espérance et calculer $E(X)$.
3. (a) Préciser $X(\Omega)$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, exprimer $P(X = i)$ à l'aide d'une somme.
   (b) Ecrire en scilab un script simulant la variable aléatoire X.

Exercice 15
Un sac contient n billes numérotées de 1 à n. On tire une bille au hasard, on note son numéro et on la remet dans le sac. On appelle X la v.a. qui prend pour valeur ce numéro. Si ce numéro est k, on tire alors sans remise k billes que l'on distribue une à une au hasard dans p boîtes B_1, ...,B_p. On note Y_i la v.a. égale au nombre de billes reçues dans la boîte B_i ($i \in [[1, p]]$).

1. Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$, $V(X)$.
2. Pour tout $(k, l) \in [[1, n]]^2$, calculer $P([X = k] \cap [Y_i = l])$.
3. Donner alors la loi de Y_i sous la forme d'une somme.
4. En utilisant la formule de l'espérance totale, calculer $E(Y_i)$.
5. Ecrire un programme en langage Scilab qui demande n à l'utilisateur puis qui simule X et Y_1.
6. Calculer l'espérance de $\frac{Y_i}{X}$.