Exercices - Intégrales impropres - Corrigés des exercices 7-8-10

Exercice 7 :

On définit pour $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$

Tout le début de l'exercice est hyper-classique. La dernière question est difficile et l'énoncé non détaillé.

1. Soit $x \in]0; +\infty[$. La fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ est impropre en $+\infty$ uniquement. De plus, pour tout $t \geq 1$, $-xt \leq 0$ donc $e^{-xt} \leq 1$, et ainsi $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par critère de majoration (fonctions positives), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ converge.

   Bilan : $\boxed{f \text{ est bien définie sur }]0; +\infty[}$

2. Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ avec $x \leq y$. Alors pour tout $t \geq 1$,
$$\begin{aligned} -xt \geq -yt \quad &\Rightarrow \quad e^{-xt} \geq e^{-yt} \\ &\Rightarrow \quad \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \geq \frac{e^{-yt}}{1+t^2} \end{aligned}$$
   D'où en intégrant, les bornes étant dans le bon sens et les intégrales convergentes, $f(x) \geq f(y)$.

   Bilan : $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[}$

3. D'une part, pour tout $x > 0$, pour tout $t \geq 1$, on a $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \geq 0$ d'où en intégrant (bornes bon sens), $f(x) \geq 0$.

   D'autre part, pour tout $x > 0$, pour tout $t \geq 1$, $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$ d'où en intégrant
$$f(x) \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt}dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dx = \frac{1}{x}$$
   Ainsi, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, par encadrement $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   Bilan : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

4. Soit $(x, x_0) \in]0; +\infty[^2$. Alors
$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left|\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-x_0.t}}{1+t^2}dt\right| \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &\leq \int_1^{+\infty} \frac{|e^{-xt} - e^{-x_0.t}|}{1+t^2}dt \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq \int_1^{+\infty} |e^{-xt} - e^{-x_0t}|dt \end{aligned}$$
   Supposons $x \leq x_0$. Alors pour tout $t \geq 1$, $e^{-xt} \geq e^{-x_0t}$, donc $e^{-xt} - e^{-x_0t} \geq 0$. De plus, si $A > 1$,
$$\begin{aligned} \int_1^A e^{-xt} - e^{-x_0t}dt &= [-\frac{1}{x}e^{-xt} + \frac{1}{x_0}e^{-x_0t}]_1^A \\ &= \frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x_0}e^{-x_0} - \frac{1}{x}e^{-Ax} + \frac{1}{x_0}e^{-Ax_0} \\ &\to_{A\to+\infty} \frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x_0}e^{-x_0} \end{aligned}$$
   Donc dans ce cas $|f(x)-f(x_0)| \leq \frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x_0}e^{-x_0}$. De même si $x_0 \leq x$, on trouve que $|f(x)-f(x_0)| \leq \frac{1}{x_0}e^{-x_0} - \frac{1}{x}e^{-x}$. On trouve dans tous les cas que
$$|f(x) - f(x_0)| \leq \left|\frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x_0}e^{-x_0}\right|$$

Comme $\lim_{x\to x_0} |\frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x_0}e^{-x_0}| = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$: f est continue en x_0.

Bilan : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$

Exercice 8 :

Une série et une suite

1. La fonction $g : t \mapsto \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0, 1]$, l'intégrale I est donc impropre en 0.
   De plus,
$$\frac{\frac{\ln^2(t)}{1+t^2}}{1/\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}.\ln^2(t)}{1+t^2} \sim_{t\to0} \sqrt{t}.\ln^2(t) \to_{t\to0} 0 \text{ par CC}$$
   Donc $g(t) = o_{t\to0}(\frac{1}{\sqrt{t}})$. Comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est convergente (Riemann en 0, $\alpha = 1/2 < 1$), par critère de négligeabilité (fonctions positives), l'intégrale I est convergente.

2. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\ln^2(t)\,dt$. Soit $\epsilon \in]0, 1[$ et $u_n^\epsilon = \int_\epsilon^1 t^{2n}\ln^2(t)\,dt$ Posons
$$\begin{cases} u(t) = \ln^2(t) \\ v'(t) = t^{2n} \end{cases} \to \begin{cases} u'(t) = 2.\ln(t).\frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \end{cases}$$
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, 1]$. Par IPP,
$$\begin{aligned} u_n^\epsilon &= [\ln^2(t).\frac{t^{2n+1}}{2n+1}]_\epsilon^1 - \frac{2}{2n+1}.\int_\epsilon^1 \ln(t).t^{2n}dt \\ &= -\ln^2(\epsilon).\frac{\epsilon^{2n+1}}{2n+1} - \frac{2}{2n+1}.v_n^\epsilon \end{aligned}$$
   où $v_n^\epsilon = \int_\epsilon^1 \ln(t).t^{2n}dt$. Posons
$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = t^{2n} \end{cases} \to \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \end{cases}$$
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, 1]$. Par IPP,
$$\begin{aligned} v_n^\epsilon &= [\ln(t).\frac{t^{2n+1}}{2n+1}]_\epsilon^1 - \frac{1}{2n+1}.\int_\epsilon^1 t^{2n}dt \\ &= -\ln(\epsilon).\frac{\epsilon^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}.(\frac{1}{2n+1} - \frac{\epsilon^{2n+1}}{2n+1}) \end{aligned}$$
   D'où
$$u_n^\epsilon = -\ln^2(\epsilon).\frac{\epsilon^{2n+1}}{2n+1} - 2\ln(\epsilon).\frac{\epsilon^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \frac{2}{(2n+1)^3} - 2.\frac{\epsilon^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$
   et donc enfin, en faisant tendre ϵ vers 0 et par CC : $\lim_{\epsilon\to0} u_n^\epsilon = \frac{2}{(2n+1)^3}$, ce qui montre que l'intégrale définissant u_n est convergente et que $u_n = \frac{2}{(2n+1)^3}$.

   Bilan : $\boxed{u_n = \dfrac{2}{(2n+1)^3}}$

3. Pour tout $t \in [0; 1]$:
$$\begin{aligned} 1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} &= \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k \\ &= \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \end{aligned}$$
   et on en déduit aisément que
$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$$

4. On multiplie par $\ln^2(t)$ la relation précédente :

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\ln^2(t).t^{2k}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}.\ln^2(t)}{1+t^2}$$

En intégrant entre 0 et 1, on obtient alors que

$$I=\sum_{0}^{n}(-1)^k.u_k+(-1)^{n+1}.\int_0^1\frac{t^{2n+2}.ln^2(t)}{1+t^2}dt$$

Notons que cette dernière intégrale est faussement impropre en 0 donc convergente. De plus,

$$\begin{aligned}|(-1)^{n+1}.\int_0^1\frac{t^{2n+2}.ln^2(t)}{1+t^2}dt| &= \int_0^1\frac{t^{2n+2}.ln^2(t)}{1+t^2}dt\\ &\leq \int_0^1 t^{2n+2}.ln^2(t)dt\\ &\leq u_{n+1}=\frac{2}{(2n+3)^3}\end{aligned}$$

D'où $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}.\int_0^1\frac{t^{2n+2}.ln^2(t)}{1+t^2}dt=0$ par encadrement.
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\sum_0^n(-1)^k.u_k=I$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty}\sum_0^n(-1)^k.\frac{2}{(2k+1)^3}=I$

Bilan : $\boxed{\text{la série }\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\text{ est convergente et }\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{I}{2}}$

Exercice 10 :

Une suite d'intégrales impropres

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $f_n : x\mapsto\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ et $I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\,dx$

1. La fonction f_n étant continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale I_n est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$. De plus, comme f_n est une fonction paire, l'intégrale I_n converge ssi l'intégrale $I'_n=\int_0^{+\infty}f_n(x)\,dx$ est convergente.
$\frac{1}{(1+x^2)^n}\sim_{n\to+\infty}\frac{1}{x^{2n}}$. Comme $n\geq 1$, $2n>1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2n}}dx$ est une intégrale de Riemann convergente. Par critère d'équivalence, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ est convergente. Comme $\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ est bien définie, l'intégrale I' converge donc I_n aussi.
Soit $A>0$.
$$I'_{1,A}=\int_0^A\frac{1}{1+x^2}dx=Arctan(A)-Arctan(0)=Arctan(A)\to_{A\to+\infty}\frac{\pi}{2}$$
d'où $I_1=2I'_1=\pi$ (par parité de f_1).

Bilan : $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*\text{, l'intégrale } I_n \text{ est convergente et } I_1=\pi}$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{(1+x^2)}\in[0,1]$, donc $\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\leq\frac{1}{(1+x^2)^n}$. D'où en intégrant, les bornes étant dans le bon sens et les intégrales convergentes, $I_{n+1}\leq I_n$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.
De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{(1+x^2)^n}\geq 0$ d'où par positivité de l'intégrale (bornes bon sens), $I_n\geq 0$. Etant décroissante et minorée par 0, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$, $A>0$ et $I'_{n,A}=\int_0^A\frac{1}{(1+x^2)^n}dx$. Posons

$$\begin{cases}u(x)=\frac{1}{(1+x^2)^n}=(1+x^2)^{-n}\\ v'(x)=1\end{cases}\to\begin{cases}u'(x)=-2nx.(1+x^2)^{-n-1}=-\frac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}}\\ v(x)=x\end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$. Par IPP,

$$\begin{aligned}I'_{n,A} &= [\frac{x}{(1+x^2)^n}]_0^A+2n.\int_0^A\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n}+2n.\int_0^A\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n}+2n.\int_0^A\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}\text{ encore et toujours !!}\\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n}+2n.I'_{n,A}-2n.I'_{n+1,A}\end{aligned}$$

En passant à la limite quand A tend vers $+\infty$, :

$$I'_n=2n.I'_n-2n.I'_{n+1}\Leftrightarrow I'_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}.I'_n$$

D'où en multipliant par 2 les deux membres, par parité : $I_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}.I_n$.

Bilan : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}.I_n}$

4. On a donc $I_n=\frac{2n-3}{2n-2}.I_{n-1}$, puis
$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}.\frac{2n-5}{2n-4}.I_{n-2}$$
$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}.\frac{2n-5}{2n-4}.\cdots.\frac{1}{2}.I_1$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{2n-3}{2n-2}.\frac{2n-5}{2n-4}.\cdots.\frac{1}{2} &= \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)....1}{(2n-2)^2.(2n-4)^2.....2^2}\\ &= \frac{(2n-2)!}{4.(n-1)^2.4.(n-2)^2.\cdots.4.1^2}\\ &= \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}.((n-1)!)^2}\end{aligned}$$

D'où enfin

Bilan : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n=\frac{(2n-2)!}{4^{n-1}.((n-1)!)^2}.\pi}$