CB1 - Sujet 1 EDHEC / Ecricome - Lundi 6 novembre 2023

Consignes

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.
Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice M, c'est-à-dire la somme de ses coefficients diagonaux. On admet que l'application trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f n'est pas l'endomorphisme nul (on pourra distinguer les cas $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $Tr(A) \neq 0$).
3. (a) Etablir que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $(f \circ f)(M) = \mathrm{Tr}(A).f(M)$.
   (b) Donner les valeurs propres possibles de f.
4. Montrer que 0 est valeur propre de f.
5. Montrer que si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors f n'est pas diagonalisable.
6. On suppose dans cette question que la trace de A est non nulle.
   (a) Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$?
   (b) Conclure que f est diagonalisable.

Exercice 2

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}.$$

1. Étude de la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

(c) En déduire l'existence de trois constantes réelles positives A, B et C telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 , on ait :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$

(d) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(e) Ecrire un programme Python qui renvoie la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n \geq 10$.

2. Recherche d'un équivalent de S_n.

(a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = 1$.

(b) En déduire que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$.

3. Étude asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

(a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à $3, u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. Dans la suite de l'exercice, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera notée l.

On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}$

(a) Convergence de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

i. Prouver que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ii. On admet qu'il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

En déduire que la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite L en fonction de γ.

iii. Montrer que la suite $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers L.

iv. Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers L.

(b) Une valeur approchée de la limite L de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

i. Vérifier que la suite $(A_{2n})_{n\geq 1}$ est croissante et que la suite $(A_{2n+1})_{n\geq 1}$ est décroissante.

ii. En déduire que $\forall n \geq 1,\ A_{2n} \leq L \ \leq A_{2n+1}$.

iii. Ecrire alors un programme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de L à 10^{-5} près.

Problème : les matrices pseudo-inversibles

Les deux parties de ce problèmes sont largement indépendantes.
Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est dite pseudo-inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} AB = BA & (1) \\ ABA = A & (2) \\ BAB = B & (3) \end{cases}$$

On dit alors que B est une pseudo-inverse de A.

Partie I : Définition, premières propriétés

1. Deux exemples :

   (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ?

   En considérant la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, montrer que A est pseudo-inversible.

   (b) Le programme Python suivant :

   ```
   import numpy as np
   C=np.array([[0,0,0],[0,1,0],[0,0,2]])
   D=np.array([[0,0,0],[0,1,0],[0,0,1/2]])
   print(np.dot(C,D)-np.dot(D,C))
   print(np.dot(np.dot(C,D),C)-C)
   print(np.dot(np.dot(D,C),D)-D)
   ```

   renvoie trois fois la matrice

   ```
   [[0. 0. 0.]
    [0. 0. 0.]
    [0. 0. 0.]]
   ```

   Que peut-on alors affirmer ?

2. Unicité de la pseudo-inverse
   Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible ainsi que B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A.

   (a) En calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $AB_2 = AB_1$.

   (b) En déduire que $B_1 = B_2$.

   Ainsi la matrice A admet une unique pseudo-inverse appelée la matrice pseudo-inverse de A et notée A^*.

3. Quelques exemples

   (a) Montrer que la matrice nulle d'ordre n est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.

(b) Montrer que toute matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est inversible est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.

4. Cas d'une matrice nilpotente
   Soit N une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que N^p soit la matrice nulle et que N^{p-1} soit non nulle.

   (a) On suppose que N est pseudo-inversible.
   Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 , on a
   $$N^*N^k = N^{k-1}.$$
   Aboutir à une contradiction. Que peut-on en déduire ?

   (b) Que peut-on en déduire concernant la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

5. Cas d'une matrice diagonalisable

   (a) Montrer que toute matrice diagonale d'ordre n à coefficients réels est pseudo-inversible et préciser sa pseudo-inverse.

   (b) Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible et P une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.
   Montrer que la matrice $A' = P^{-1}AP$ est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse en fonction de P et de A^*.

   (c) En déduire que toute matrice diagonalisable est pseudo-inversible.

6. Un exemple :
   Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres de A.

   (b) Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A : déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = P.D.P^{-1}$.

   (c) Calculer P^{-1}.

   (d) Montrer que la matrice A est pseudo-inversible et déterminer la pseudo-inverse de A.

Partie II : Une caractérisation des matrices pseudo-inversibles

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique $\mathcal{B}$ et on introduit l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Le but de cette partie est de montrer que :
$$A \text{ est pseudo-inversible } \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$$

1. Le sens direct :
   Dans cette question, on suppose que A est pseudo-inversible et on introduit l'endomorphisme f^* tel que $A^* = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$. On a alors :
   $$\begin{cases} f \circ f^* = f^* \circ f & (1) \\ f \circ f^* \circ f = f & (2) \\ f^* \circ f \circ f^* = f^* & (3) \end{cases}$$

(a) Prouver que

$$\begin{cases} f^* \circ f \circ f = f \\ f \circ f \circ f^* = f \end{cases}$$

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

(c) En déduire que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^n$.

2. La réciproque :
Dans cette question, on suppose que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.

On définit l'application

$$\begin{array}{rcl} f_0 : \mathrm{Im}(f) & \to & \mathrm{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

et on admet qu'elle est linéaire.

(a) Montrer que f_0 est un automorphisme de $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

On pose alors $g(x) = (f_0)^{-1}(x_2)$.

(c) Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

(d) Montrer que :

$$\begin{cases} f \circ g = g \circ f & (1) \\ f \circ g \circ f = f & (2) \\ g \circ f \circ g = g & (3) \end{cases}$$

(e) En déduire que A est pseudo-inversible.

3. Une autre formulation :

(a) Montrer que pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad Im(f) = Im(f^2)$$

(b) Donner alors une condition nécessaire et suffisante portant sur le rang de A pour qu'une matrice A soit pseudo-inversible.

(c) Une application : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Le programme Python suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A=np.array([[2,-2,2],[-1,1,1],[1,-1,3]])
print(al.matrix_rank(A))
print(al.matrix_rank(np.dot(A,A)))
```

renvoie

```
2
2
```

La matrice A est-elle pseudo-inversible ? Justifiez votre réponse.