Corrigé du CB1 - Sujet 1 type EDHEC / Ecricome - Lundi 6 novembre 2023

Exercice 1 : Edhec 2014

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme M et A sont deux matrices carrées d'ordre n, il est clair que $f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi l'application f va bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\alpha.M+N) &= \mathrm{Tr}(A)(\alpha.M+N) - \mathrm{Tr}(\alpha.M+N)A \\ &= \alpha(\mathrm{Tr}(A).M - \mathrm{Tr}(M).A) + \mathrm{Tr}(A).N - \mathrm{Tr}(N).A \text{ par linéarité de la trace} \\ &= \alpha.f(M) + f(N) \end{aligned}$$

   donc f est linéaire.
   Bilan : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

2. Montrons que f n'est pas l'endomorphisme nul.
   - 1er cas : si $\mathrm{Tr}(A) = 0$
     Dans ce cas, $f(I) = -\mathrm{Tr}(I).A = -nA \neq 0$, donc f n'est pas l'application nulle.
   - 2ème cas : si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$
     Supposons que f soit l'application nulle.
     Alors on aurait pour toute matrice M, $M = \frac{\mathrm{Tr}(M)}{\mathrm{Tr}(A)}.A$ donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset Vect(A)$, ce qui est absurde puisque $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2 > \dim(Vect(A)) = 1$ (car $n \geq 2$). Ainsi f ne peut pas être l'application nulle.
   - Bilan : $\boxed{f \text{ n'est pas l'endomorphisme nul}}$

3. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En remarquant au préalable que $f(A) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f \circ f(M) &= f(\mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A) \\ &= \mathrm{Tr}(A).f(M) - \mathrm{Tr}(M).f(A) \\ &= \mathrm{Tr}(A).f(M) \end{aligned}$$

   (b) Autrement dit, $f^2 - \mathrm{Tr}(A).f = 0$, c'est-à-dire que le polynôme P tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(A).x$ est annulateur de f. D'après le cours,

$$Sp(f) \subset \{ \text{ racines de } P\}$$

   Donc $Sp(f) \subset \{0, \mathrm{Tr}(A)\}$.
   Bilan : les seules valeurs propres possibles de f sont donc 0 et $\mathrm{Tr}(A)$.

4. $f(A) = 0$ et $A \neq 0$ donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f}$

5. Supposons que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Alors avec ce qui précède, $Sp(f) = \{0\}$. Supposons que f soit diagonalisable. Alors on aurait

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \oplus_{\lambda \in Sp(f)} Ker(f - \lambda Id) = Ker(f)$$

   donc f serait l'application nulle. Ceci est absurde d'après le 2. !
   Donc $\boxed{\text{si } \mathrm{Tr}(A) = 0, \text{ alors } f \text{ n'est pas diagonalisable}}$

6. On suppose dans cette question sur la trace de A est non nulle.
   (a) L'application Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
   On a $Im(\mathrm{Tr}) \subset \mathbb{R}$, donc $\dim(Im(\mathrm{Tr}) = 0$ ou $= 1$. Mais l'application Tr n'est pas nulle puisque l'on a par exemple $\mathrm{Tr}(I) = n \neq 0$. Par conséquent, $\dim(Im(\mathrm{Tr}) = 1$ et par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1$.
   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M \in Ker(f - \mathrm{Tr}(A).Id) &\Leftrightarrow f(M) - \mathrm{Tr}(A).M = 0 \\ &\Leftrightarrow -\mathrm{Tr}(M).A = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0 \text{ car } A \neq 0 \\ &\Leftrightarrow M \in Ker(\mathrm{Tr}) \end{aligned}$$

   Ainsi $Ker(f - \mathrm{Tr}(A).Id) = Ker(\mathrm{Tr})$. Par conséquent $\dim(Ker(f - Tr(A).Id) = \dim(Ker(Tr)) = n^2 - 1$.
   Comme $0 \in Sp(f)$, on sait aussi que $\dim(Ker(f)) \geq 1$.
   D'où

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Ker(f - \mathrm{Tr}(A)) \geq n^2$$

   D'une part, comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$, on sait que

$$\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(Ker(f - \lambda Id) \leq n^2 \Leftrightarrow \dim(Ker(f)) + \dim(Ker(f - \mathrm{Tr}(A)) \leq n^2$$

   Par conséquent, on a nécessairement :
   $\dim(Ker(f)) = 1$, $\dim(Ker(f - Tr(A).Id)) = n^2 - 1$ et

$$\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(Ker(f - \lambda Id) = n^2$$

   Bilan : $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$

Exercice 2

1. Étude de la nature de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   (a) Notons $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. La fonction f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

   Donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

   (b) On sait que $e \simeq 2,7$. La fonction f est décroissante sur $[e; +\infty[$ et donc aussi sur $[3; +\infty[$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$.

- Pour tout $x \in [k, k+1]$, $f(x) \geq f(k)$ par décroissance de f, d'où en intégrant (bornes bon sens $k < k+1$, fonctions continues) :

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}dx \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

- Pour tout $x \in [k-1, k]$, $f(x) \geq f(k)$, d'où

$$\int_{k-1}^k f(x)dx \geq \int_{k-1}^k f(k)dx \Rightarrow \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x}$$

- On obtient ainsi : pour tout entier k supérieur ou égal à 4,

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{3} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

En sommant la relation obtenue à la question précédente pour k variant de 4 à n :

$$\sum_{k=4}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leq \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

D'où en appliquant la relation de Chasles de façon répétée,

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}dx \leq S_n - \sum_{k=1}^{3} \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_3^n \frac{\ln(x)}{x}dx$$

Or on calcule aisément :

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}dx = [\frac{1}{2}(\ln(x))^2]_4^{n+1} = \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln(4))^2$$

$$\int_3^{n} \frac{\ln(x)}{x}dx = [\frac{1}{2}(\ln(x))^2]_3^{n} = \frac{1}{2}(\ln(n))^2 - \frac{1}{2}(\ln(3))^2$$

En posant $A = \frac{1}{2}(\ln(4))^2$, $B = \sum_{k=1}^{3} \frac{\ln(k)}{k}$, $C = \frac{1}{2}(\ln(3))^2$, on a bien trois constantes réelles positives telles que pour tout $n \geq 4$,

$$\boxed{\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C.}$$

(d) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{2} = +\infty$, on a par entrainement $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$

(e)
```
import numpy as np
S=0
n=0
while S<10:
    n=n+1
    S=S+np.log(n)/n
print(n)
```

2. Recherche d'un équivalent de S_n.

(a) Pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+1/n))}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \to_{n\to+\infty} 1$$

Puis par composition avec la fonction carré (continue en 1) : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = 1$.

(b) D'après le 1.(c), pour tout $n \geq 4$,

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2\ln^2(n)} - \frac{A}{\ln^2(n)} + \frac{B}{\ln^2(n)} \leq \frac{S_n}{\ln^2(n)} \leq \frac{1}{2} - \frac{C}{\ln^2(n)} + \frac{B}{\ln^2(n)}$$

et on obtient aisément par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln^2(n)} = \frac{1}{2}$.

Bilan : $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}}$

3. Étude asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

(a) Soit $n \geq 3$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\ln^2(n+1) + \frac{1}{2}\ln^2(n)$$

Or d'après le 1.(b), on a

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \geq \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}dx = [\frac{1}{2}(\ln(x))^2]_n^{n+1} = \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2(n)$$

et on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

(b) Par ailleurs,

$$u_n = S_n - \frac{1}{2}\ln^2(n) \geq \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2(n) - A + B \geq -A + B$$

La suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est donc décroissante et minorée par $-A+B$. Par conséquent il s'agit bien d'une suite convergente.

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$

4. Dans la suite de l'exercice, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera notée l.

On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}$.

(a) Limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
S_{2n} - A_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \sum_{\substack{k \text{ pair} \\ 1\leq k\leq 2n}} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k \text{ impair} \\ 1\leq k\leq 2n}} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{\substack{k \text{ impair} \\ 1\leq k\leq 2n}} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k \text{ pair} \\ 1\leq k\leq 2n}} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= 2.\sum_{\substack{k\text{pair} \\ 1\leq k\leq 2n}} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= 2.\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2i)}{2i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2) + \ln(i)}{i} \\
&= S_n + \ln(2).\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

Bilan : pour tout entier naturel non nul n, on a bien

$$\boxed{A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.}$$

ii. On admet qu'il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= u_{2n} + \frac{\ln^2(2n)}{2} - u_n - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2).(\ln(n) + \gamma + o(1))\\
&= u_{2n} - u_n + \frac{(\ln(2)+\ln(n))^2}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2).\ln(n) - \ln(2).\gamma + o(1)\\
&= u_{2n} - u_n + \frac{\ln^2(2)}{2} + \ln(2).\ln(n) + \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2).\ln(n) - \ln(2).\gamma + o(1)\\
&= u_{2n} - u_n + \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2).\gamma + o(1)
\end{aligned}$$

Comme la suite (u_n) converge vers la limite l, on a $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} - u_n = 0$.

Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_{2n} = \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2).\gamma = L}$

iii. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{2n+1} = A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} A_{2n} = L$ et par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = 0$, on a encore $\lim_{n\to+\infty} A_{2n+1} = L$

iv. Pour conclure, comme $\lim_{n\to+\infty} A_{2n} = \lim_{n\to+\infty} A_{2n+1} = L$, on peut dire que $\lim_{n\to+\infty} A_n = L$.

Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2).\gamma}$

Autrement dit, la série $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}$ converge et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2).\gamma}$$

(b) Valeur approchée de la limite L

i. Pour tout $n \geq 1$,

$$A_{2n+2} - A_{2n} = -\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$$

et par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $[3;+\infty[$:
$-\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \geq 0$ donc $A_{2n+2} \geq A_{2n}$: la suite $(A_{2n})_{n\geq 1}$ est croissante.
De façon analogue, pour tout $n \geq 1$,

$$A_{2n+3} - A_{2n+1} = \frac{\ln(2n+3)}{2n+3} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \leq 0$$

donc la suite $(A_{2n+1})_{n\geq 1}$ est décroissante.

ii. La suite (A_{2n}) étant croissante de limite L, elle est toujours inférieure à sa limite L. De façon analogue, la suite (A_{2n+1}) étant décroissante de limite L, elle est toujours supérieure à sa limite.
Bilan : $\boxed{\forall n \geq 1,\ A_{2n} \leq L \ \leq A_{2n+1}}$

iii. On est sûr que A_{2n} ou A_{2n+1} est une valeur approchée de la limite L à 10^{-5} près dès que $A_{2n+1} - A_{2n} \leq 10^{-5}$, c'est à dire dès que $\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \leq 10^{-5}$. Le programme ci-dessous convient alors :

```
n=1
while np.log(2*n+1)/(2*n+1)>10**(-5):
    n=n+1
A=0
for k in range(2,2*n+1):
    A=A+(-1)**(k-1)*np.log(k)/k
print("Valeur approchée de L : ", A)
```

Problème : les matrices pseudo-inversibles

Partie I : Définition, premières propriétés

1. Deux exemples :

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
La matrice A est triangulaire supérieure, avec un 0 sur la diagonale, donc A n'est pas inversible.

Notons $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, alors :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

$$ABA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$BAB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = B$$

Bilan : $\boxed{A \text{ est pseudo-inversible et a pour pseudo-inverse la matrice } B}$

(b) Le programme montre que la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est pseudo-inversible, de pseudo-inverse $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Unicité du pseudo-inverse
Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible ainsi que B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A.

(a) D'une part,

$$AB_1AB_2 = (AB_1A)B_2 = AB_2$$

et d'autre part

$$AB_1AB_2 = B_1AB_2A = B_1A = AB_1$$

en utilisant le fait que A et B_1 commutent, et que A et B_2 commutent.
Ainsi $AB_2 = AB_1$.

(b) On a alors aussi $B_2A = B_1A$ et

$$B_2 = B_2AB_2 = B_2AB_1 = B_1AB_1 = B_1$$

Bilan : $\boxed{B_1 = B_2}$

Ainsi la matrice A admet un unique pseudo-inverse appelé la matrice pseudo-inverse de A et notée A^*.

3. Quelques exemples

(a) Soit $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ la matrice nulle d'ordre n. Alors en notant encore $B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, les matrices intervenant dans les relations (1) étant toutes nulles, on voit bien que A est pseudo-inversible d'inverse B.
Bilan : $\boxed{A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \text{ est pseudo-inversible, et a pour pseudo-inverse } A^* = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}$

(b) Soit P une matrice inversible d'ordre n. Alors il est évident que

$$PP^{-1} = I = P^{-1}P, \quad PP^{-1}P = P, \quad P^{-1}PP^{-1} = P^{-1}$$

donc P est pseudo inversible de pseudo inverse P^{-1}

Bilan : $\boxed{\text{si } M \text{ est inversible alors } M \text{ est pseudo-inversible et } M^* = M^{-1}}$

4. Cas d'une matrice nilpotente
Soit N une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que N^p soit la matrice nulle et que N^{p-1} soit non nulle.

(a) On suppose que N est pseudo-inversible. Pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$N^*N^k = N.N^*.N.N^{k-2} = N.N^{k-2} = N^{k-1}$$

où on a utilisé le fait que N et N^* commutent.
Comme $N^p = 0$, on a alors $N^*.N^p = 0$ donc $N^{p-1} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse portant sur N.

Bilan : $\boxed{\text{une matrice nilpotente n'est jamais pseudo-inversible}}$

(b) On vérifie aisément que la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est non nulle et nilpotente, puisque $N^2 = 0$. La matrice N n'est donc pas pseudo-inversible.

5. Cas d'une matrice diagonalisable

(a) Soit D une matrice diagonale, $D = Diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. On définit alors une matrice $E = Diag(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ où pour tout $i \in [[1, n]]$, on a $\beta_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} \text{ si } \alpha_i \neq 0 \\ 0 \text{ si } \alpha_i = 0 \end{cases}$.
Alors $DE = ED = Diag(\delta_1, \cdots, \delta_n)$, où $\delta_i = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha_i \neq 0 \\ 0 \text{ si } \alpha_i = 0 \end{cases}$. De plus, on a alors

$$DED = Diag(\delta_1, .., \delta_n).Diag(\alpha_1, ..., \alpha_n) = Diag(\alpha_1, ..., \alpha_n) = D$$

et

$$EDE = Diag(\beta_1, \cdots, \beta_n).Diag(\delta_1, .., \delta_n) = Diag(\beta_1, ..., \beta_n) = E$$

Bilan : $\boxed{D \text{ est inversible de pseudo-inverse } D^* = E}$

(b) Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible et P une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Notons $A' = P^{-1}.A.P$. Soit $(A')^* = P^{-1}.A^*.P$. Alors on a bien :

$$A'.(A')^* = P^{-1}.A.P.P^{-1}.A^*.P = P^{-1}.A.A^*P = P^{-1}.A^*.A.P = (A')^*.A'$$

$$A'.(A')^*.A' = P^{-1}.A.A^*.A.P = P^{-1}.A.P = A'$$

$$(A')^*.A'.(A')^* = P^{-1}.A^*.A.A^*P = P^{-1}.A^*.P = (A')^*$$

et utilisant à chaque fois $P.P^{-1} = I$.
Bilan : $\boxed{\text{la matrice } A' = P^{-1}AP \text{ est pseudo-inversible et } (A')^* = P^{-1}.A^*.P}$

(c) Soit A une matrice diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Comme D est diagonale, elle est pseudo-inversible d'après le 5.a). Puis d'après le 5. b), la matrice $PDP^{-1} = A$ est pseudo-inversible.

Bilan : $\boxed{\text{toute matrice diagonalisable est pseudo-inversible}}$

(d) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

i. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Une matrice est inversible ssi ses réduites de Gauss le sont.

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2+5\lambda-4 \end{pmatrix} \quad L_2 \to L_2 + L_1 \text{ et } L_3 \to L_3 - (2-\lambda)L_1 \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2+6\lambda-8 \end{pmatrix} \quad L_3 \to L_3 - L_2 \end{aligned}$$

Cette dernière matrice étant triangulaire, elle n'est pas inversible ssi $\lambda = 0$ ou $-\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = 4$.

Bilan : $\boxed{Sp(A) = \{0, 2, 4\}}$

- Calculons $Ker(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X \in Ker(A) &\Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{Ker(A) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

- Calculons $Ker(A-2I)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$X \in Ker(A-2I) \quad \Leftrightarrow \quad (A-2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2y+2z = 0 \\ -x-y+z = 0 \\ x-y+z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{Ker(A-2I) = Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

- Calculons $Ker(A-4I)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$X \in Ker(A-4I) \quad \Leftrightarrow \quad (A-2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y+2z = 0 \\ -x-3y+z = 0 \\ x-y-z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{Ker(A-4I) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

ii. Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et possède trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable. Notons

$$D = Diag(0,2,4) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors on a $A = P.D.P^{-1}$.

iii. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors

$$PX = Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+z = a \\ x+y = b \\ y+z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+z = a \\ y-z = -a+b \\ y+z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z = a \\ y-z = -a+b \\ 2z = a-b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a-z = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c \\ y = z-a+b = -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c \end{cases}$$

et on en déduit que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

iv. On a alors $D^* = Diag(0, 1/2, 1/4)$ et enfin

$$A^* = P.D^*.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 & 1/8 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/8 & 1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

tous calculs faits

Partie II : Une caractérisation des matrices pseudo-inversibles.

1. (a) Comme les endomorphismes f et f^* commutent, la relation $f \circ f^* \circ f = f$ s'écrit aussi:

$$\begin{cases} f^* \circ f \circ f = f \\ f \circ f \circ f^* = f \end{cases}$$

(b) Comme $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, il est évident que $\{0\} \subset Ker(f) \cap Im(f)$.
Soit $y \in Ker(f) \cap Im(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors

$$y = f(x) = f^* \circ f \circ f(x) = f^*(f(y)) = f^*(0_E) = 0$$

puisque $y \in Ker(f)$. Donc $y = 0$ et on a $Ker(f) \cap Im(f) \subset \{0\}$.
Bilan : par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}}$

(c) On a $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E)$ donc $Ker(f) \oplus Im(f) = E$: $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans E.

2. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.
On définit l'application

$$\begin{array}{rccl} f_0 : & \mathrm{Im}(f) & \to & \mathrm{Im}(f) \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

et on admet qu'elle est linéaire.

(a) Soit $x \in Im(f)$. Alors

$$x \in Ker(f_0) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in Ker(f) \cap Im(f) \Leftrightarrow x = 0$$

puisque $Ker(f) \cap Im(f) = 0$, les deux s.e.v. $Im(f)$ et $Ker(f)$ étant en somme directe. Par conséquent, f_0 est un endomorphisme injectif de l'e.v. $Im(f)$ qui est de dimension finie, il s'agit donc d'un automorphisme de $\mathrm{Im}(f)$.

(b) D'après le cours, puisque $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

On pose alors $g(x) = (f_0)^{-1}(x_2)$.

(c) L'application g va clairement de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrons que g est linéaire.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On décompose x et y sous la forme

$$x = x_1 + x_2 \text{ et } y = y_1 + y_2$$

où $(x_1, y_1) \in Ker(f)^2$ et $(x_2, y_2) \in Im(f)^2$. On a alors

$$\alpha x + y = \alpha x_1 + y_1 + \alpha x_2 + y_2$$

où $\alpha x_1 + y_1 \in Ker(f)$ et $\alpha x_2 + y_2 \in Im(f)$. Par définition de g, on a alors

$$\begin{aligned} g(\alpha x + y) &= (f_0)^{-1}(\alpha x_2 + y_2) \\ &= \alpha (f_0)^{-1}(x_2) + (f_0)^{-1}(y_2) \text{ par linéarité de } f_0^{-1} \\ &= \alpha g(x) + g(y) \text{ par définition de } g \end{aligned}$$

Ainsi g est linéaire.

Bilan : $\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n}$

(d) Montrons que :

$$\begin{cases} f \circ g = g \circ f \quad (1) \\ f \circ g \circ f = f \quad (2) \\ g \circ f \circ g = g \quad (3) \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, avec $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in Ker(f)$ et $x_2 \in Im(f)$. Alors

$$f \circ g(x) = f \circ (f_0)^{-1}(x_2) = x_2$$

En effet, comme $f_0^{-1}(x_2) \in Im(f)$, on a $f \circ (f_0)^{-1}(x_2) = f_0 \circ (f_0)^{-1}(x_2) = x_2$
De plus, $g \circ f(x) = g(f(x_1) + f(x_2)) = g \circ f(x_2) = (f_0)^{-1}(f(x_2)) = (f_0)^{-1} \circ f_0(x_2) = x_2$ puisque $x_2 \in Im(f)$.
Ainsi $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, on en déduit donc (1).
Ensuite,

$$f \circ g \circ f(x) = f(x_2) = f(x_1 + x_2) = f(x) \text{ puisque } f(x_1) = 0$$

d'où (2) et enfin

$$g \circ f \circ g(x) = g(x_2) = (f_0)^{-1}(x_2) = g(x) \text{ par définition de } g$$

d'où (3).

(e) En notant B la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme g défini précédemment, on a alors

$$AB = BA, ABA = A, BAB = B$$

Bilan : $\boxed{A \text{ est pseudo-inversible}}$

3. Une autre formulation :

(a) Montrons que pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad Im(f) = Im(f^2)$$

- Supposons que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^n$ et montrons que $Im(f) = Im(f^2)$.
Tout d'abord, pour tout $y \in Im(f^2)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f^2(x) = f(f(x))$ donc $y \in Im(f)$. On a donc déjà l'inclusion $Im(f^2) \subset Im(f)$.
Soit $y \in Im(f)$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. Par hypothèse $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^n$, il existe donc $x_1 \in Ker(f)$ et $x_2 \in Im(f)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_2 = f(z)$ et on a alors

$$y = f(x) = f(x_1 + f(z)) = f(x_1) + f^2(z) = f^2(z)$$

donc $y \in Im(f^2)$. D'où l'inclusion $Im(f) \subset Im(f^2)$.
Finalement on obtient bien que $Im(f) = Im(f^2)$.
Ainsi $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^n \Rightarrow Im(f) = Im(f^2)$.

- Supposons que $Im(f) = Im(f^2)$ et montrons que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^n$. Tout d'abord d'après le th. du rang, on sait que $\dim(Ker(f) + \dim(Im(f)) = n$. Il reste donc à montrer que $Ker(f) + Im(f) = \mathbb{R}^n$.
Notons que l'inclusion $Ker(f) + Im(f) \subset \mathbb{R}^n$ est évidente.
Il reste à montrer que $\mathbb{R}^n \subset Ker(f) + Im(f)$.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Alors $f(y) \in Im(f) = Im(f^2)$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(y) = f^2(x)$. Alors

$$y = y - f(x) + f(x)$$

où $f(x) \in Im(f)$ et $y - f(x) \in Ker(f)$ puisque $f(y - f(x)) = f(y) - f^2(x) = 0$. Donc $y \in Ker(f) + Im(f)$. Ainsi on a bien $Ker(f) + Im(f) = \mathbb{R}^n$.
- Bilan : $\boxed{Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad Im(f) = Im(f^2)}$

(b) On remarque que si $Im(f) = Im(f^2)$ alors $rg(f) = rg(f^2)$. L'implication réciproque est également vraie : si $rg(f) = rg(f^2)$, comme $Im(f^2) \subset Im(f)$, on a alors $Im(f^2) = Im(f)$.

Pour une matrice A et f son application linéaire canoniquement associée, on a alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est pseudo-inversible} &\Leftrightarrow Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow rg(f) = rg(f^2) \\ &\Leftrightarrow rg(A) = rg(A^2) \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{A \text{ est pseudo-inversible ssi } rg(A) = rg(A^2)}$

(c) Le programme indique que $rg(A) = rg(A^2)$ donc la matrice A est pseudo-inversible d'après ce qui précède.