Concours Blanc 1 - Sujet type Edhec/Ecricome
lundi 4 novembre 2024 - DS n°2

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *leurs résultats.*

Dans tous les programmes Python, on suppose que l'on a déjà fait les imports suivants :
`import numpy as np` et `import numpy.linalg as al`

Exercice 1

1. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - Id)^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Calculer $(f - Id)^2 + f \circ (2Id - f)$.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x = (f - Id)^2(x) + (f \circ (2Id - f))(x)$.
   (c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$.

2. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :
$$f \circ (f - Id) \circ (f - 4Id) = 0$$
   (a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant:
$$\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1$$
   (b) En déduire que : $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$.

3. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p \geqslant 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe p réels $a_1, \dots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$, tels que $P = a_1 X + \cdots + a_p X^p$.
   (b) En déduire que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$.
   (c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes?

Exercice 2

On note, pour tout entier naturel n, $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t)\ dt$.

1. Justifier que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2. (a) Rappeler la fonction dérivée de la fonction $t \mapsto \tan(t)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) En déduire la valeur de J_0.

3. (a) Justifier que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} + J_n = \frac{1}{2n+3}$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2(2n+3)} \leq J_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}$ et préciser la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Donner un équivalent de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.

5. On note : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n J_n$.
   (b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.
   (c) Justifier que : $S_n - \dfrac{\pi}{4} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n}$

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie par:

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. (a) Ecrire une fonction Python, intitulée `def f(n,x)` qui calcule $f_n(x)$.
   (b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$.
   En déduire alors une deuxième façon de définir la fonction f_n, en complétant les instructions suivantes :

```
def f(n,x):
    if x==1 :
        return ......
    else :
        return .......
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0,1]$, possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.

3. (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

4. (a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 < 1$.
   (b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

5. On suppose que la fonction f_n a été déclarée (cf question 1). On considère les commandes supplémentaires suivantes :

```
n=int(input("Entrer la valeur de n : "))
x=0
while f(n,x)<1 :
    x=x+0.001
print(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

Problème

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: on rappelle que $e_0 = 1$ et que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $e_k = X^k$.

Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'application φ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P, avec la convention $P^{(0)} = P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ.
   (b) Montrer que : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.
   (c) En déduire que la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question précédente.
   (d) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. (a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P - P')$.
   (b) Déterminer φ^{-1}, puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) On donne le script `Python` suivant :

```
n=int(input("Entrer la valeur de n : "))
M=np.eye(n+1)
for k in range(0,n):
   M[k,k+1]=-(k+1)
A=......
print(A)
```

   Compléter la cinquième ligne de ce script pour qu'il affiche la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$ lorsque la valeur de n est entrée par l'utilisateur.

Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t} dt$$

On rappelle également l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

On désigne par x un réel quelconque.

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, dt$ est convergente.

(b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,dt$ est convergente.

5. (a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt$.

   (b) Etablir par récurrence que pour tout entier naturel k, on a :

$$\int_x^{+\infty} t^k\,e^{-t}\,dt = k!\,\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i\,!}\,e^{-x}$$

6. Informatique

   (a) Ecrire une fonction Python intitulée `def facto(n):` qui calcule $n!$.

   (b) Ecrire ensuite une fonction Python utilisant la fonction `facto`, intitulée `def Integrale(k,x):` qui calcule et renvoie la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\,e^{-t}\,dt$.

On considère maintenant l'application Ψ qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F = \Psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \Psi(P)(x) = F(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,dt$$

7. (a) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et montrer que $F' = F - P$.

   (c) Montrer que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de Ψ pour une valeur propre λ non nulle.

   (a) Utiliser la relation obtenue à la question 7.(b) pour établir que $P' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\,P$.

   (b) En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de Ψ.

   (c) Montrer enfin que $\lambda = 1$ est bien la seule valeur propre de Ψ. (On ne demande pas le sous-espace propre associé).

9. (a) Montrer que les endomorphismes φ et Ψ sont égaux.

   (b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que pour tout réel x supérieur ou égal à a, on a $P(x) \geq 0$, alors : $\forall x \geq a\ ,\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geq 0$.