Corrigé du Concours Blanc 1 - Sujet type Edhec/Ecricome

Exercice 1 : Edhec 2016

Polynômes d'endomorphismes (cours de 1ère année ++)

1. (a)
$$(f-Id)^2 + f\circ(2Id-f) = f^2 - 2f + Id + 2f - f^2 = Id$$

(b) D'après la première question, $Id = (f-Id)^2 + f\circ(2Id-f)$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}^n$:
$$Id(x) = (f-Id)^2(x) + (f\circ(2Id-f))(x)$$
soit :
$$x = (f-Id)^2(x) + (f\circ(2Id-f))(x)$$

(c) Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $f((f-Id)^2(x)) = f\circ(f-Id)^2(x) = 0$ donc $(f-Id)^2(x)\in Ker(f)$.
De plus, $(f\circ(2Id-f))(x)\in Im(f)$. Donc, avec (b), tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme somme d'un vecteur de $Ker(f)$ et d'un vecteur de $Im(f)$, on a alors $\mathbb{R}^n = Ker(f)+Im(f)$.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim\ Ker(f) + \dim\ Im(f) = n = \dim\mathbb{R}^n$, donc on a bien $\mathbb{R}^n = Ker(f)\oplus Im(f)$
Bilan : $\boxed{\mathbb{R}^n = Ker(f)\oplus Im(f)}$

2. (a) Posons $P(X) = aX+b$, où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\neq 0$. En développant et en identifiant, on trouve que $a = -\frac{1}{4}$ et $b=\frac{5}{4}$ conviennent.
Bilan : $\boxed{P(X) = -\frac{1}{4}X+\frac{5}{4}}$

(b) Comme dans 1., on a cette fois-ci à partir de $\frac{1}{4}(X-1)(X-4)+XP(X) = 1$:
$$\frac{1}{4}(f-Id)\circ(f-4Id) + f\circ P(f) = Id$$
Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$:
$$x = \left(\frac{1}{4}(f-Id)\circ(f-4Id)\right)(x) + (f\circ P(f))(x)$$
Or l'énoncé nous dit que : $f\circ(f-Id)\circ(f-4Id) = 0$, donc $\left(\frac{1}{4}(f-Id)\circ(f-4Id)\right)(x)\in Ker(f)$
de plus $(f\circ P(f))(x) = f[(P(f))(x)]\in Im(f)$.
Donc $\mathbb{R}^n = Ker(f)+Im(f)$.
Toujours d'après le théorème du rang, $\dim\ Ker(f)+\dim\ Im(f) = n = \dim\mathbb{R}^n$, donc on a bien $\mathbb{R}^n = Ker(f)\oplus Im(f)$
Bilan : $\boxed{\mathbb{R}^n = Ker(f)\oplus Im(f)}$

3. (a) $P\in\mathbb{R}_p[X]$, il existe donc $(a_0,\dots,a_p)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P = a_0+a_1X+\cdots+a_pX^p$. De plus $P(0) = a_0$ et $P'(0) = a_1$. Donc d'après l'énoncé, $a_0 = 0$ et $a_1\neq 0$.

(b) Soit $x\in Ker(f)\cap Im(f)$. Alors il existe $y\in\mathbb{R}^n$ tel que $x = f(y)$, et de plus $f(x) = 0$.
On a donc $f^2(y) = 0$, et pour tout $k\geq 2$, $f^k(y) = f^{k-2}(f^2(y)) = f^{k-2}(0) = 0$.
P étant annulateur de f, on a $(P(f))(y) = 0$, soit : $a_1f(y)+a_2f^2(y)\cdots+a_pf^p(y) = 0$.
Comme $f^2(y) = \cdots = f^p(y) = 0$, on obtient $a_1f(y) = 0$, c'est-à-dire que $a_1x = 0$.
Comme $a_1\neq 0$, $x = 0$.
Bilan : $Ker(f)\cap Im(f) = \{0\}$.

Une fois de plus, par le théorème du rang, $\dim Ker(f)+\dim Im(f) = \dim\mathbb{R}^n$, donc $\mathbb{R}^n = Ker(f)\oplus Im(f)$.
Bilan : $\boxed{\mathbb{R}^n = Ker(f)\oplus Im(f)}$

(c) Dans la question 1., $P = X(X-1)^2$, et dans la question 2., $P = X(X-1)(X-4)$, vérifient tous les deux $P(0) = 0$ et $P'(0)\neq 0$ (c'est-à-dire que 0 est racine simple de ces polynômes). Le résultat que l'on vient d'obtenir est bien une généralisation des deux questions précédentes.

Exercice 2 : Edhec 2016

Soit n un entier naturel , $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}(t)dt$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé.
La fonction $t\to\tan(t)$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.
Par produit, la fonction $t\to(\tan(t))^{2n+2}$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.
Ainsi l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}(t)dt$ existe. Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N},\quad J_n$ existe.
Bilan : $\boxed{\text{La suite } (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$

2. (a) La fonction $t\to\tan(t)$ est dérivable sur sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et
$\forall t\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\quad \tan'(t) = 1+\tan^2(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$.

(b)
$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{0+2}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1+\tan^2(t)-1dt \\ J_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan'(t)-1dt = [\tan(t)-t]_0^{\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$
Ainsi $\boxed{J_0 = 1-\frac{\pi}{4}}$.

3. (a) **Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé.**
$$\begin{aligned} J_{n+1}-J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+4}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}(t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+4}(t)-\tan^{2n+2}(t)dt \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}(t)\left(\tan^2(t)-1\right)dt \end{aligned}$$
Soit $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ fixé.
$y\to\tan(y)$ est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ donc $\tan(0)\leq\tan(t)\leq\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
Donc $0\leq\tan(t)\leq 1$.
$y\to y^2$ est croissante sur $[0,1]$ donc $0\leq\tan^2(t)\leq 1$. Ainsi, $\tan^2(t)-1\leq 0$.
$\tan(t)\geq 0$ donc $\tan^{2n+2}(t)\left(\tan^2(t)-1\right)\leq 0$.
Bilan $\boxed{\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right], \tan^{2n+2}(t)\left(\tan^2(t)-1\right)\leq 0}$
En intégrant membre à membre cette inégalité, les bornes étant dans le bon sens $0\leq\frac{\pi}{4}$,
on obtient : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}(t)\left(\tan^2(t)-1\right)dt\leq 0$
ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\quad J_{n+1}-J_n\leq 0$. Bilan : $\boxed{\text{la suite } (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

(b) **Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé.**
$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right], \tan^{2n+2}(t)\geq 0$
En intégrant membre à membre cette inégalité, les bornes étant dans le bon sens $0\leq\frac{\pi}{4}$,
on obtient : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}(t)dt\geq 0$
Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\quad J_n\geq 0$. Ainsi la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.

Par ailleurs, elle est décroissante.

Grâce au théorème de limite monotone, $\boxed{\text{la suite } (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$

On note ℓ sa limite.$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell \leq J_{n+1} \leq J_n \leq J_0$.

4. (a) **Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.**

$$\begin{aligned}
J_{n+1} + J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+4}(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+4}(t) + \tan^{2n+2}(t)dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t)\left(\tan^2(t)+1\right)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan'(t)\tan^{2n+2}(t)dt \\
&= \left[\frac{1}{2n+3}\tan^{2n+3}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2n+3}\tan^{2n+3}\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0
\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} + J_n = \frac{1}{2n+3}.}$

(b) La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Ainsi $n-1 \in \mathbb{N}$ donc $J_{n+1} \leq J_n \leq J_{n-1}$

Ainsi $J_{n+1}+J_n \leq J_n + J_n \leq J_{n-1} + J_n$. Par ailleurs, $n-1 \in \mathbb{N}$ donc la formule établie en 4.a. est valable en particulier pour $n-1$ et pour n, ainsi

$$\frac{1}{2n+3} \leq 2J_n \leq \frac{1}{2(n-1)+3}.$$

$2 > 0$ donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{2(2n+3)} \leq J_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}}$

Par encadrement, on trouve que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$

(c) *Idée : on remarque que :* $\frac{1}{2(2n+3)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n}$ *et que* $\frac{1}{2(2n+1)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n}$

On va essayer de montrer que $J_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n}$,

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$4n > 0$ donc $\dfrac{4n}{2(2n+3)} \leq 4nJ_n \leq \dfrac{4n}{2(2n+1)}$

Par quotient , $\dfrac{4n}{2(2n+3)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{4n}{4n} \sim_{n\to+\infty} 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4n}{2(2n+3)}\right) = 1$

De même : $\dfrac{4n}{2(2n+1)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{4n}{4n} \sim_{n\to+\infty} 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4n}{2(2n+3)}\right) = 1$

Grâce au théorème des encadrements, $\lim_{n\to+\infty}(4nJ_n) = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{J_n}{\frac{1}{4n}}\right) = 1$.

Ainsi : $\boxed{J_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n}}$.

5. (a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n J_n$ par récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}$, On note $\mathscr{H}(n)$ la proposition :" $S_n = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n J_n$."

• $S_0 = \sum_{k=0}^{0} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = 1$.

Par ailleurs, $\dfrac{\pi}{4} + (-1)^0 J_0 = \dfrac{\pi}{4} + 1 - \dfrac{\pi}{4} = 1$, grâce à la question 2b.

Donc $\boxed{\mathscr{H}(0) \text{ est vraie.}}$

• Supposons que $\mathscr{H}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+1} \\
&= S_n + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} \\
&= \frac{\pi}{4} + (-1)^n J_n + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n+3} \quad \text{car } \mathscr{H}(n) \text{ est supposée vraie.} \\
&= \frac{\pi}{4} + (-1)^n J_n + (-1)^{n+1}(J_n + J_{n+1}) \quad \text{grâce à 2} \\
&= \frac{\pi}{4} + (-1)^n (J_n - J_n) + (-1)^{n+1} J_{n+1} \\
&= \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} J_{n+1}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie.

• <u>Par récurrence</u> : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n J_n}$

(b) soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$\left|S_n - \dfrac{\pi}{4}\right| = |(-1)^n J_n| = |(-1)^n| \times |J_n| = J_n$. car $J_n \geq 0$.

On a montré que $J_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n}$ donc $\lim_{n\to+\infty}(J_n) = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\left|S_n - \dfrac{\pi}{4}\right|\right) = 0$

$\frac{\pi}{4}$ est indépendant de n donc la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut : $\lim_{n\to+\infty}(S_n) = \frac{\pi}{4}$.

$\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{(-1)^n}{2n+1} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{n\to+\infty}(S_n) = \frac{\pi}{4}}$

(c) On a montré que $J_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n}$. Par produit : $(-1)^n J_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n}$

Bilan: $\boxed{S_n - \dfrac{\pi}{4} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n}}$

Exercice 3 : Edhec 2017

Analyse de 1ère année uniquement

1. (a)
```
def f(n,x):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s=s+x**k
    return s
```

(b) Pour $x \neq 1$, on a : $f_n(x) = x.\dfrac{1-x^n}{1-x}$ et pour $x = 1$, $f_n(x) = n$. Le programme peut alors s'écrire :

```
def f(n,x):
    if x==1 :
        y=n
    else :
        y=x*(1-x**n)/(1-x)
    return y
```

2. f est continue et dérivable sur $[0,1]$ comme fonction polynômiale.

Sa dérivée $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, est strictement positive sur $[0,1]$. f réalise donc une bijection

strictement croissante de $[0,1]$ sur $[f(0), f(1)] = [0, n]$. Le nombre $1 \in [0, n]$ possède donc un unique antécédent dans $[0,1]$ par f.
Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 1 \text{ possède une unique solution } \alpha_n \in [0,1]}$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_n^k = f_n(\alpha_n) + \alpha_n^{n+1} = 1 + \alpha_n^{n+1}$$

Or, $\alpha_n \in [0,1]$, donc $\underline{f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant 1}$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1$$

et comme f_{n+1} est strictement croissante, on peut alors conclure que $\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}$.

Bilan : $\boxed{\text{La suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

(b) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0.
Bilan : $\boxed{\text{La suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers une limite } \ell \in [0,1].}$

4. (a) Par définition, α_2 est l'unique solution de l'équation $x + x^2 = 1$ dans $[0,1]$. Un simple calcul de discriminant donne alors $\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. De plus $1 \leqslant \sqrt{5} < 3$ donne directement les inégalités demandées.

Bilan : $\boxed{\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et on a bien } 0 \leqslant \alpha_2 < 1.}$

(b) $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, on a pour tout entier $n \geq 2$:

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_2 < 1 \qquad \text{et donc} \qquad 0 \leqslant \alpha_n^{n+1} \leqslant \alpha_2^{n+1}$$

Or, puisque $\alpha_2 \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_2^{n+1} = 0$ et par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
Bilan : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0.}$

(c) D'après 1.(b), α_n est l'unique solution, dans $[0,1]$, de l'équation $x.\frac{1-x^n}{1-x} = 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\alpha_n - \alpha_n^{n+1} = 1 - \alpha_n, \quad \text{ou encore} \quad : \quad 2\alpha_n = 1 + \alpha_n^{n+1}$$

Or, d'après les questions précédentes,

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0, \quad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell$$

La limite ℓ de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie donc : $2\ell = 1$ et donc $\ell = \frac{1}{2}$.

Bilan : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}.}$

5. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On sait déjà que f_n est croissante sur $[0,1]$ et $f_n(0) = 0$. Le programme va alors tester toutes les valeurs de $f_n(x)$ à partir de $x = 0$ et avec un pas de 0,001 tant que $f_n(x) < 1$. La valeur affichée par le programme est alors le premier de ces nombres x pour lequel $f_n(x) \geqslant 1$. Le résultat affiché est donc le plus petit nombre du type $k \times 0,001$ ($k \in \mathbb{N}$) supérieur ou égal à α_n.

Bilan : $\boxed{\text{Le résultat affiché est une valeur approchée par excès à 0,001 près de } \alpha_n.}$
Il s'agit de la méthode dite "de balayage" pour calculer la valeur approchée d'une solution d'équation.

Problème : Edhec 2017

Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $k \in [[0,n]]$, $P^{(k)} \in \mathbb{R}_n[X]$, φ est donc bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a:

$$\varphi(\lambda P + Q) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda P + Q)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda P^{(k)} + Q^{(k)}\right) = \lambda \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

et φ est alors bien linéaire.

Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. (a) e_0 est le polynôme constant égal à 1, donc pour tout $k \geqslant 1$, $(e_0)^{(k)}$ est nul. Donc:

$$\varphi(e_0) = \sum_{k=0}^{n} (e_0)^{(k)} = e_0$$

De plus, e_0 n'est pas le polynôme nul.

Bilan : $\boxed{\varphi(e_0) = e_0 \text{ et 1 est une valeur propre de } \varphi.}$

(b) Soit $j \in [[1,n]]$. On a :

$$\varphi(e_j) - e_j = e_j + \sum_{k=1}^{n} (e_j)^{(k)} - e_j = \sum_{k=1}^{n} (e_j)^{(k)}$$

Or, $e_j \in \mathbb{R}_j[X]$ avec $j \geqslant 1$, donc pour tout entier $k \geqslant 1$, $(e_j)^{(k)}$ appartient à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{j-1}[X]$.

Bilan : $\boxed{\forall j \in [[1,n]], \quad (\varphi(e_j) - e_j) \in \mathbb{R}_{j-1}[X].}$

(c) D'après ce qui précède, $\varphi(e_0) = e_0$ et pour tout $j \in [[1,n]]$,
il existe $Q_{j-1} \in \operatorname{Vect}(e_0, \ldots, e_{j-1})$ tel que $\varphi(e_j) = Q_{j-1} + e_j$. La matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ s'écrit donc :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant triangulaire, les valeurs propres de φ sont alors les coefficients diagonaux.
Bilan :

$\boxed{\text{La matrice de } \varphi \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est donc triangulaire supérieure, l'unique valeur propre de } \varphi \text{ est 1.}}$

(d) $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, elle est donc inversible et φ est alors un endomorphisme bijectif.
Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $P' = P^{(1)} \in \mathbb{R}_n[X]$ et par télescopage :

$$\varphi(P - P') = \sum_{k=0}^{n} (P - P')^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)} - P^{(k+1)}\right) = P - P^{(n+1)}$$

Or, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $P^{(n+1)}$ est nul.

Bilan : $\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P - P') = P.}$

(b) Posons $\psi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\psi(P) = P - P'$.
ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (facile) et d'après la question précédente :

$$\varphi \circ \psi = Id_{\mathbb{R}_n[X]} \text{ et en composant par } \varphi^{-1}, \quad \psi = \varphi^{-1}$$

On a alors $\varphi^{-1}(e_0) = e_0$ et pour tout $k \in [[1, n]]$, $\varphi^{-1}(e_k) = e_k - ke_{k-1}$.

Bilan :

φ^{-1} est définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi^{-1}(P) = P - P'$
et la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Le programme indiqué calcule la matrice M de φ^{-1} dans la base $\mathscr{B}$. Pour obtenir $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ il suffit alors d'inverser M :

```
n=int(input("entrez la valeur de n : "))
M=np.eye(n+1)
for k in range(0,n):
    M[k,k+1]=-(k+1)
A=al.inv(M)
print(A)
```

Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On désigne par x un réel quelconque.

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^k.e^{-t}$ est continue sur $[x; +\infty[$ donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k.e^{-t}\, dt$ est impropre en $+\infty$.

$$\frac{t^k.e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{k+2}.e^{-t} \to_{t \to +\infty} 0 \text{ par croissance comparée}$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente (Riemann impropre en $+\infty$, $2 > 1$). Par critère de négligeabilité des fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^k.e^{-t}\, dt$ est convergente. De plus la fonction $t \mapsto t^k.e^{-t}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k.e^{-t}\, dt$ converge.

Bilan : $\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t \text{ converge.}}$

(b) Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t).e^{-t} = \sum_{k=0}^{n} a_k.t^k e^{-t}$.

Or, d'après (a), pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t$ converge, donc $\int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} \mathrm{d}t$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes.

Bilan : $\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et tout } x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} \mathrm{d}t \text{ converge.}}$

5. (a) Calculons cette intégrale. Pour tout $b > x$, on a :

$$\int_x^b e^{-t} \mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_x^b = e^{-x} - e^{-b}$$

Or, $\lim_{b \to +\infty} e^{-b} = 0$, donc l'intégrale converge et vaut e^{-x}.

Bilan : $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}t = e^{-x}}$

(b) Soit pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}(k) : \quad \int_x^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i\,!}\, e^{-x}$$

On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

<u>Initilisation</u> : pour $k = 0$ c'est la question précédente.

<u>Hérédité</u> : supposons que, pour un certain rang $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(k)$ est vraie. Effectuons alors une intégration par parties pour calculer $\int_x^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} \mathrm{d}t$.
$u : t \mapsto t^{k+1}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
$u' : t \mapsto (k+1)t^k$ et $v' : t \mapsto e^{-t}$, et pour tout $b > x$:

$$\int_x^b t^{k+1} e^{-t} \mathrm{d}t = \left[-t^{k+1} e^{-t}\right]_x^b - \int_x^b -(k+1) t^k e^{-t} \mathrm{d}t$$

$$\int_x^b t^{k+1} e^{-t} \mathrm{d}t = x^{k+1} e^{-x} - b^{k+1} e^{-b} + (k+1) \int_x^b t^k e^{-t} \mathrm{d}t$$

Or, par croissance comparée, $\lim_{b \to +\infty} b^{k+1} e^{-b} = 0$ et la convergence de l'intégrale étant déjà acquise, on en déduit :

$$\int_x^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} \mathrm{d}t = x^{k+1} e^{-x} + (k+1) \int_x^{\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t$$

Soit encore, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\int_x^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} \mathrm{d}t = x^{k+1} e^{-x} + (k+1)k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x} = (k+1)! \sum_{i=0}^{k+1} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$$

donc $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie.

Bilan :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}.}$$

6. Informatique.

(a)
```
def facto(n):
    a=1
    for k in range(1,n+1):
        a=a*k
    return a
```

(b)
```
def Integrale(x,k):
    S=0
    for i in range(0,k+1):
        S=S+x**i/facto(i)*np.exp(-x)
    S=facto(k)*S
    return S
```

7. (a) Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $(\lambda P + Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc, d'après 4.(b), les intégrales suivantes sont, pour tout $x \in \mathbb{R}$, toutes convergentes et :

$$\int_x^{+\infty} (\lambda P + Q)(t) e^{-t}\mathrm{d}t = \lambda \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

et donc, en multipliant par e^x, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\Psi(\lambda P + Q)](x) = \lambda[\Psi(P)](x) + [\Psi(Q)](x)$$

Autrement dit, $\Psi(\lambda P + Q) = \lambda \Psi(P) + \Psi(Q)$ et <u>Ψ est linéaire</u>.

Montrons maintenant que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Psi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour cela, il suffit de le vérifier pour les polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la linéarité permettra d'en déduire le résultat. Soit alors $k \in [[0,n]]$. D'après 5.(b) et la définition de Ψ, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[\Psi(X^k)](x) = e^x \times \left(k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x} \right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x^i \in \mathbb{R}_n[X]$$

et donc, par linéarité de Ψ, pour tout $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Psi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Bilan :

$$\boxed{\Psi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

(b) D'après la question précédente, F est un polynôme et est donc bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, la convergence permet d'écrire la relation de Chasles, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t - \int_0^{x} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = C$ est alors une constante, donc de dérivée nulle par rapport à x. Notons G une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto P(t).e^{-t}$. Cette fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc $F = e^x.(C - G(x) + G(0))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
De plus,

$$F'(x) = e^x. \int_x^{+\infty} P(t).e^{-t}\ dt - e^x.P(x).e^{-x} = F(x) - P(x)$$

Bilan :

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F' = F - P.}$$

(c) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Psi)$. On a alors $F = \Psi(P) = 0$. Donc $F' = 0$ et d'après la question précédente : $P = F - F' = 0$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(\Psi) \subset \{0\}$ et l'inclusion réciproque étant évidente, $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{0\}$ et Ψ est injective. De plus $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, l'endomorphisme Ψ est alors, par corollaire du théorème du rang, bijectif.

Bilan : $\boxed{\Psi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$

8. (a) On a $F = \Psi(P) = \lambda P$ donc $F' = \lambda P'$. De plus, d'après 7.(b), $F' = F - P$.
Donc $\lambda P' = \lambda P - P = (\lambda - 1)P$. Reste alors à diviser par $\lambda \neq 0$.

Bilan :

$$\boxed{\text{Pour } P \neq 0 \text{ vecteur propre associé à une valeur propre } \lambda \neq 0, \text{ on a : } P' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} P.}$$

(b) Remarquons tout d'abord que 0 ne peut pas être valeur propre puisque Ψ est un automorphisme.
Posons $\deg(P) = k \in [[0,n]]$. Si P est constant ($k = 0$) alors $P' = 0 = \frac{\lambda-1}{\lambda} P$ et comme $P \neq 0$, on a $\lambda = 1$. Si P n'est pas constant ($k \in [[1,n]]$) alors $\deg(P') = k - 1 = \deg\left(\frac{\lambda-1}{\lambda} P\right)$ ce qui est impossible car $\deg\left(\frac{\lambda-1}{\lambda} P\right) = \begin{cases} k & , \text{si } \lambda \neq 1 \\ -\infty & , \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$

Bilan : $\boxed{\lambda = 1 \text{ est la seule valeur propre possible de } \Psi.}$

(c) D'après 5.(a), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = e^{-x}$. Donc, $[\Psi(1)](x) = e^x \times e^{-x} = 1$. Autrement dit, $\Psi(1) = 1$ et le polynôme constant égal à 1 est un vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre 1. Avec la question précédente, on sait que c'est la seule.

Bilan : $\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de } \Psi}$

9. (a) Ψ et φ sont tous les deux des automorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour montrer que Ψ et φ sont égaux il suffit de montrer qu'ils coïncident sur la base canonique. Soit $k \in [[0,n]]$, on a :

D'une part

$$(X^k)^{(i)} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-i+1)X^{k-i} & , \text{si } i \leqslant k \\ 0 & , \text{si } i > k \end{cases}$$

et donc :

$$\varphi(X^k) = \sum_{i=0}^{n} (X^k)^{(i)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!} X^j$$

La dernière égalité étant obtenue par le renversement d'indice $j = k - i$.

D'autre part, d'après 5.(b),

$$\Psi(X^k) = e^x \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = e^x \left(k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x} \right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x^i$$

Donc : $\varphi(X^k) = \Psi(X^k)$ pour tout $k \in [[0, n]]$.
Bilan :

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } \varphi \text{ et } \Psi \text{ sont égaux.}}$$

(b) Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \geqslant a$, $P(x) \geqslant 0$. Dans ce cas, $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est positive sur $[x, +\infty[$ et par positivité de l'intégrale, on a :

$$\forall x \geqslant a, \quad [\Psi(P)](x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Mais comme φ et Ψ sont égaux, on a alors :

$$\forall x \geqslant a, \quad [\varphi(P)](x) \geqslant 0$$

ce qui est exactement le résultat recherché.

Bilan :

$$\boxed{\forall x \geqslant a, \quad \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geqslant 0}$$