Concours Blanc 1 - Sujet facultatif type HEC
vendredi 8 novembre 2024

On pose : $E_0 = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \text{ bornée sur } \mathbb{R} \right\}$.

Si $f \in E_0$, on notera $N_0(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Partie I - Propriétés de la fonction arctan.

On rappelle que la fonction arctan est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler une expression de $\arctan'(x)$.
2. Montrer que arctan réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que vous préciserez.
3. Justifier que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Si $f \in E_0$, on définit, sous réserve d'existence,

$$\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \arctan(tx).\frac{f(t)}{1+t^2}dt$$

L'objectif du problème est d'obtenir quelques propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ.

Partie II - Premières propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ.

5. Vérifier que E_0 est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
6. Soit $f \in E_0$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \arctan(tx)\dfrac{f(t)}{1+t^2}dt$ est absolument convergente.
7. Soit $f \in E_0$, montrer que $\Phi(f)$ est bornée et $N_0[\Phi(f)] \leq \frac{\pi^2}{4} N_0(f)$.
8. <u>Etude de la continuité de $\Phi(f)$ pour $f \in E_0$</u>
   Dans cette question, f désigne un élément de E_0 et x un réel.
   (a) Soit A un réel strictement positif et $h \in \mathbb{R}^*$, vérifier que :
   $|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq N_0(f) \left(\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt \right)$
   (b) En déduire que, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, pour tout $A > 0$,
   $$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq N_0(f) \left(|h| \int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt + \pi \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right)$$
   (c) Soit $h \in \mathbb{R}^*$, en choisissant $A = \frac{1}{|h|}$, établir que :
   $$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq |h| \frac{N_0(f)}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi N_0(f) \arctan |h|$$
   (d) Montrer alors que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (e) En déduire que $\Phi : f \in E_0 \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E_0.

Partie III - Etude d'un exemple.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'application

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt$$

Autrement dit, g est l'image par Φ de l'application constante égale à 1 : $x \in \mathbb{R} \mapsto 1$.

9. Vérifier que g est impaire.

10. <u>Etude de la dérivabilité de g sur $]0, +\infty[$</u>
Soit x un réel strictement positif.
   (a) Vérifier que, pour tout $u \in \mathbb{R}, |\arctan''(u)| \leq \frac{1}{1+u^2}$.
   (b) Soit a et b deux réels distincts et I le segment d'extrémités a et b. Montrer que :
   $$\left| \arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u \in I} \left(\frac{1}{1+u^2} \right)$$
   (c) Soit $h \in]-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}[$ et t un réel positif, établir :
   $$\left| \arctan[t(x+h)] - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2} \right| \leq \frac{t^2h^2}{2} \frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}$$
   (d) Montrer alors que, pour tout $h \in]-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}[$,
   $$\left| g(x+h) - g(x) - h \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)} \frac{1}{(1+t^2)} dt \right| \leq 2h^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(4+t^2x^2)} \frac{1}{(1+t^2)} dt$$
   (e) En déduire que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et justifier que, pour tout $x > 0$,
   $$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt$$
   (f) g est-elle dérivable sur $]-\infty, 0[$? Si oui, que vaut $g'(x)$ pour $x < 0$?

11. <u>Calcul de $g'(x)$ pour $x > 0$.</u>
   (a) Déterminer $g'(1)$.
   (b) Pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, chercher des expressions $A(x)$ et $B(x)$, indépendantes de t, telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = A(x) \frac{t}{1+t^2x^2} + B(x) \frac{t}{1+t^2}$.
   (c) En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty\left[, g'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}\right.$.
   (d) g est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$?

12. <u>Une nouvelle expression de $g(x)$ pour $x > 0$.</u>
   (a) Justifier, pour tout $x > 0$, la convergence de l'intégrale $\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt$.
   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, que $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt$

13. <u>Etude de la limite de g en $+\infty$.</u>
   (a) Démontrer que, pour tout $x > 0, g(x) = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2} dt$.

(b) Ecrire, pour tout $x > 0$,
$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$$
et montrer alors que :
$$\left|\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt\right| \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{1}{t}.\frac{1}{1+t^2}dt \leq \frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

(c) Déterminer alors $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

14. <u>Application au calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$</u>

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}dt$ converge et calculer sa valeur à l'aide des questions précédentes.

(b) Vérifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}dt = 2\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}dt$.
On pourra utiliser le changement de variables $u = \frac{1}{t}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}dt = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^{2k}\ln t dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}dt$
(on justifiera l'existence des intégrales introduites).

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\ln t dt$.

(e) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}dt = 0$.

(f) Donner alors la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. En déduire celle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Partie IV - Retour à l'étude de Φ.

15. Montrer que $\displaystyle\sup_{f\in E_0\setminus\{0\}} \frac{N_0[\Phi(f)]}{N_0(f)} = \frac{\pi^2}{4}$.

Dans toute la suite du problème, on considère :
— $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| < \frac{4}{\pi^2}$, on pourra poser $\gamma = \frac{\pi^2}{4}|\lambda|$.
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^n = \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{n \text{ fois}}$
Autrement dit $\Phi^0 = id_{E_0}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^{N+1} = \Phi \circ \Phi^n$.
— $f \in E_0\setminus\{0\}$, on posera $M = N_0(f)$.
— pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi_n = \lambda^n\Phi^n(f)$.

16. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi_{n+1} = \lambda\Phi(\varphi_n)$ et $N_0(\varphi_{n+1}) \leq \gamma N_0(\varphi_n)$.
17. Peut-on avoir $\lambda\Phi(f) = f$? Que peut-on alors dire de $id_{E_0} - \lambda\Phi$?
18. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, N_0(\varphi_n) \leq \gamma^n M$ et que la série $\sum_{m\geq 0} N_0(\varphi_n)$ converge.
19. Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 0}\varphi_n(x)$ converge.

On note alors $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)$.

20. Montrer que φ est bornée sur $\mathbb{R}$.
21. Continuité de φ.
    (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,
$$|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)| \leq |\lambda| N_0(\varphi_n) \left[\frac{|h|}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi \arctan|h|\right]$$
    (b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,
$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)\right) \left[\frac{|h|}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi \arctan|h|\right] + |f(x+h) - f(x)|$$
    (c) Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
22. Application aux valeurs spectrales de Φ.
    (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(id_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right)$ et montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} N_0\left[(id_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) - f\right] = 0$$
    (b) Montrer alors que $(id_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) = f$. Que peut-on dire de $id_{E_0} - \lambda\Phi$?
    (c) Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $\Phi - \mu.id_{E_0}$ ne soit pas bijective, montrer que $|\mu| \leq \frac{\pi^2}{4}$.