Concours Blanc 1 - Sujet type EML
vendredi 8 novembre 2024 - DS n°3

Dans tous les programmes Python, on suppose que l'on a déjà fait l'import :
`import numpy as np`. La fonction `math.factorial` permet de calculer la factorielle, par exemple `math.factorial(5)` calcule 5!

PROBLEME I

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes P_n

1. (a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et $-\infty$.

   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n admet au moins une racine.

2. (a) Montrer: $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n sont toutes simples.

3. (a) Vérifier: $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right).$

   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1; 2n+1]$.

4. (a) Montrer les relations:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} P_{n+1}'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ P_{n+1}''(x) = P_n(x). \end{cases}$$

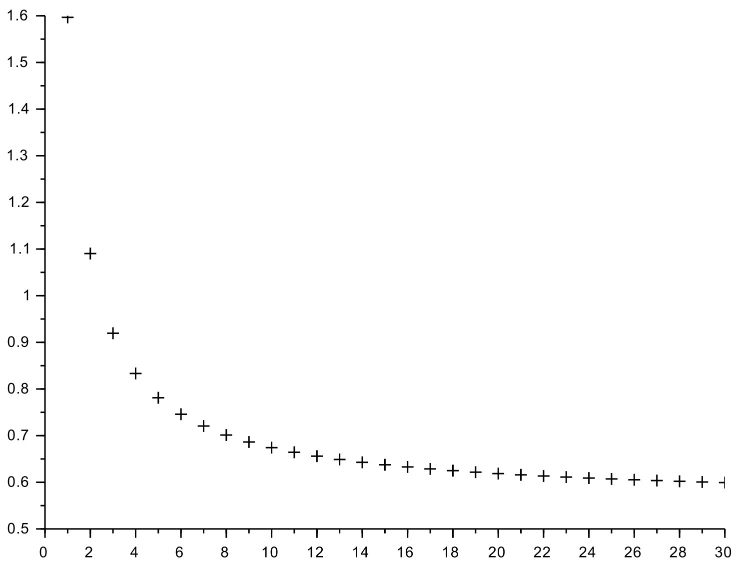
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.

5. (a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def P(n,x):` qui prend pour arguments un entier n de $\mathbb{N}$ et un réel x, et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.

   (b) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant pour argument un entier n de $\mathbb{N}$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def suite(n):
    a = .........
    b = .........
    c = (a+b)/2
    while .........
        if ......... :
            a = c
        else :
            b = c
       c = .........
   return ......
```

(c) On utilise la fonction précédente pour représenter les premiers termes de la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Conjecturer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ et la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



6. (a) Montrer: $\forall n\in\mathbb{N},\ P_{n+1}(u_n)=\dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1-\dfrac{u_n}{2n+3}\right).$

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. On suppose **dans cette question** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

   (a) Montrer: $\forall n\in\mathbb{N},\ |P_n(u_n)-P_n(\ell)|\leqslant e^{\ell}|u_n-\ell|.$

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(\ell)$. En déduire: $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(u_n)=e^{-\ell}.$

   (c) Aboutir à une contradiction.

8. En déduire la nature et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PARTIE B : Quelques résultats intermédiaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes entre elles et indépendantes de la partie A.

9. On note f la fonction définie sur $]0;1]$ par: $\forall t \in]0;1],\ f(t) = -\ln(t)$.

   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge et préciser sa valeur.

   (b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

   Justifier, pour tout k de $[\![1;n+1]\!]$: $\displaystyle\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

   En déduire: $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt + \frac{\ln(n)}{n}$.

   (c) En déduire la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   (d) Montrer finalement: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = e^{-1}$.

10. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $\forall t \in]0;+\infty[,\ g(t) = t + \ln(t) + 1$.
Montrer qu'il existe un unique α appartenant à $]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier que $e^{-2} < \alpha < e^{-1}$.

PARTIE C : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

11. (a) Montrer: $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}dt$.

    (b) Justifier: $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}dt \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

    (c) En déduire: $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ P_n(x) \leqslant e^{-x} \leqslant P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

12. Soit n un entier de $\mathbb{N}$.

    (a) Montrer: $\displaystyle P_{n+1}(u_n) \leqslant e^{-u_n} \leqslant \frac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

    (b) En utilisant le résultat des questions (3)(b) et (6)(a), obtenir:

$$\frac{2(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leqslant e^{-u_n} \leqslant \frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!},\ \text{ puis: } (2n)! \leqslant (u_n)^{2n}e^{u_n} \leqslant \frac{(2n+3)!}{2}.$$

13. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$: $\displaystyle w_n = \frac{u_n}{2n}$.

    (a) Montrer:

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n e^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}.$$

    (b) En déduire que la suite $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers α, la fonction g et le réel α étant définis dans la question (10).

14. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLEME II

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout i de $[[1;n]]$, on note V_i la matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i -ième ligne qui est égal à 1.

On rappelle que la famille $(V_i)_{i\in[[1,n]]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout (i,j) de $[[1;n]]^2$, on note $E_{i,j} = V_i.\ {}^tV_j$

Ainsi, pour tout (i,j) de $[[1;n]]^2$, la matrice $E_{i,j}$ est la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne qui est égal à 1.

On rappelle que la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout λ de $\mathbb{R}$, $A \neq \lambda I_n$. On considère l'application Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par:

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A(M) = AM - MA$$

Partie I : Quelques généralités

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Calculer $\Phi_A(I_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif? surjectif ?

Partie II : Étude d'un cas particulier

On suppose, dans cette partie seulement, que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner les valeurs propres de A. On note $\mathcal{B}$ la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée des quatre matrices suivantes :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Écrire la matrice de Φ_A dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer le rang de cette matrice.

3. Déterminer les valeurs propres de Φ_A et montrer que Φ_A est diagonalisable.

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.

2. Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de ${}^tA$.

   Montrer que $X.\ {}^tY$ est un vecteur propre de Φ_A.

3. Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   On note $\mathcal{F}$ la famille $\mathcal{F} = (X_i.\ {}^tY_j)_{(i,j)\in[[1;n]]^2}$

   Montrer que, pour tout (i,j) de $[[1;n]]^2$, $V_i.\ {}^tV_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$, et en déduire que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Établir que Φ_A est diagonalisable.

5. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent toutes les valeurs propres de A.

Partie IV : Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle

Soient λ une valeur propre non nulle de Φ_A et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé; on a alors :

$$\Phi_A(T) = \lambda T \quad \text{et} \quad T \neq 0$$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \Phi_A\left(T^k\right) = \lambda.k.T^k$$

2. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier q de $\mathbb{N}$, avec $q \leq n^2$, tel que : $T^q = 0$.

   On note p l'entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$.

3. Justifier qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $T^{p-1}X \neq 0$.

   Montrer que la famille $(X, TX, \cdots, T^{p-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   En déduire que $p \leqslant n$

Partie V : Retour sur un deuxième exemple

On suppose, dans cette partie seulement que $n = 3$ et que $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{C}$ est A.

1. (a) Déterminer les valeurs propres de A. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
   (b) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

2. (a) Déterminer deux vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ tels que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, e_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (b) Expliciter une matrice inversible Q de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = QTQ^{-1}$.

3. (a) Calculer T^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer que (I, T, T^2) est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi_T)$.

5. En déduire que (I, A, A^2) est une base de $\mathrm{Ker}(\Phi_A)$.