Corrigé du CB1 - Sujet type EM Lyon
vendredi 8 novembre 2024

PROBLEME I - EML 2020

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes P_n

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, $P_n(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \sim_{x\to+\infty} -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty$ et que $\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = +\infty$.

   (b) La fonction P_n est polynômiale donc continue sur $\mathbb{R}$. Comme de plus $\lim_{n\to-\infty} P_n(x) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un x réel tel que $P_n(x) = 0$.
   $\boxed{\text{Bilan : pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ le polynôme } P_n \text{ admet au moins une racine réelle}}$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n+1}(-1).k.\frac{(-x)^{k-1}}{k!} = -\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!}\\
&= -\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!} = -(\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-x)^k}{k!} - \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= -P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

   (b) Supposons qu'il existe une racine de P_n d'ordre au moins deux. Notons α cette racine. D'après le cours, $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$. D'après la relation précédente, on a alors $-\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}$, ce qui équivaut à $\alpha = 0$. Mais $P_n(0) = 1$ donc $\alpha = 0$ n'est pas racine de P_n !
   C'est absurde.
   $\boxed{\text{Bilan : les racines du polynôme } P_n \text{ sont toutes simples}}$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{i \text{ pair}, 0\le i\le 2n+1} \frac{x^i}{i!} - \sum_{i \text{ impair}, 0\le i\le 2n+1}\frac{x^i}{i!}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)
\end{aligned}$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x > 2n+1$, alors pour tout $k \in [[0,n]]$, $\frac{x}{2k+1} > 1$ donc $1 - \frac{x}{2k+1} < 0$ et on en déduit que $P_n(x) < 0$: x ne peut pas être racine de P_n.
   Par ailleurs si $x < 1$, alors pour tout $k \in [[0,n]]$, $\frac{x}{2k+1} < 1$ donc $1 - \frac{x}{2k+1} > 0$ et on en déduit que $P_n(x) > 0$: x ne peut pas non plus être racine de P_n.

   $\boxed{\text{Bilan : les racines de } P_n \text{ appartiennent nécessairement à l'intervalle } [1; 2n+1]}$

4. (a) On obtient comme à la question 2.(a) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
P_{n+1}'(x) &= -\sum_{k=0}^{2n+2}\frac{(-x)^k}{k!}\\
&= -\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\\
&= -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}
\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}
P_{n+1}''(x) &= -\sum_{k=1}^{2n+2}(-1).k.\frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!}\\
&= \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-x)^k}{k!}\\
&= P_n(x)
\end{aligned}$$

   (b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{H}(n)$: "P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en un unique réel u_n".
   - La fonction P_0 est définie par $P_0(x) = 1 - x$, elle est donc strictement décroissante, et s'annule uniquement en $u_0 = 1$. Donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Comme $P_{n+1}'' = P_n$, on a alors :

x	$-\infty$		u_n		$+\infty$
$P_{n+1}''(x) = P_n(x)$		$+$	0	$-$	
$P_{n+1}'(x)$		$\nearrow$	$P_{n+1}'(u_n)$	$\searrow$	

     Or $P_{n+1}'(u_n) = -P_n(u_n) - \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} = -\frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0$ car $u_n > 0$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}'(x) < 0$, ce qui montre bien que la fonction P_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x\to-\infty} P_{n+1}(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty$, donc P_{n+1} est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction P_{n+1} s'annule bien en un unique réel u_{n+1} ce qui montre $\mathcal{H}(\backslash + \infty)$.
   - Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } n, P_n \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R} \text{ et s'annule en}}$

5. (a)
```
def P(n,x):
    S=0
    for k in range(0,2*n+2):
```

```
        S=S+(-x)**k/math.factorial(k)
    return S
```

(b) On sait que la racine u_n appartient à $[1, 2*n+1]$. D'où, par la méthode de dichotomie :

```
def suite(n):
    a = 1
    b = 2*n+1
    c = (a+b)/2
    while b-a>10**(-3):
        if P(n,c)>0 :
            a = c
        else :
            b = c
       c = (a+b)/2
   return c
```

(c) Il semblerait que pour n assez grand, $\frac{u_n}{n} \simeq 0,6$, c'est-à-dire que $u_n \sim_{n\to+\infty} 0,6n$. On aurait alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

6. (a) Par définition de P_{n+1} : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= P_n(x) + \frac{(-x)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(-x)^{2n+3}}{(2n+3)!} \\ &= P_n(x) + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

En évaluant cette relation en $x = u_n$, comme $P_n(u_n) = 0$, on trouve que :

$$P_{n+1}(u_n) = \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{u_n^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right)$$

(b) On sait que $1 \leq u_n \leq 2n+1$. Donc $0 \leq \frac{u_n}{2n+3} \leq \frac{2n+1}{2n+3} \leq 1$ et par conséquent, $1 - \frac{u_n}{2n+3} \geq 0$, donc $P_{n+1}(u_n) \geq 0$. On en déduit que $P_{n+1}(u_n) \geq P_{n+1}(u_{n+1})$ et par stricte décroissance de P_{n+1}, $u_n \leq u_{n+1}$.

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

7. On suppose **dans cette question** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

(a) La suite (u_n) étant croissante et positive, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq l$. Pour tout $t \in [u_n, l]$,

$$P_n'(t) = \sum_{k=0}^{2n+1} k.(-1).\frac{(-x)^{k-1}}{k!} = -\sum_{i=0}^{2n} \frac{(-t)^i}{i!}$$

donc

$$|P_n'(t)| \leq \sum_{i=0}^{2n} \frac{|t|^i}{i!} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|t|^i}{i!} \leq e^{|t|} \leq e^l$$

Et enfin, d'après l'inégalité des accroissements finis :
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leqslant e^\ell |u_n - \ell|}$

(b) Par ailleurs,

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(l) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-l)^k}{k!} = e^{-l}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |P_n(u_n) - e^{-\ell}| &= |P_n(u_n) - P_n(\ell) + P_n(l) - e^{-\ell}| \\ &\leq |P_n(u_n) - P_n(\ell)| + |P_n(l) - e^{-\ell}| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq e^\ell |u_n - \ell| + |P_n(l) - e^{-\ell}| \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} e^\ell |u_n - \ell| + |P_n(l) - e^{-l}| = 0$, on trouve par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} P_n(u_n) = e^{-\ell}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$, donc $l \geq 1$. On a alors $e^{-\ell} > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} P_n(u_n) = e^{-\ell}$, à partir d'un certain rang n_0, on a nécessairement $P_n(u_n) > 0$: absurde puisque $P_n(u_n)$ vaut toujours 0 !

Ceci est absurde, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

8. La suite (u_n) étant croissante et divergente, elle tend nécessairement vers $+\infty$.

Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

PARTIE B : Quelques résultats intermédiaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes entre elles et indépendantes de la partie A.

9. On note f la fonction définie sur $]0;1]$ par: $\forall t \in]0;1]$, $f(t) = -\ln(t)$.

(a) La fonction f est continue sur $]0,1]$, donc l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est impropre en 0. Soit $\epsilon > 0$, alors

$$I_\epsilon = \int_\epsilon^1 (-\ln(t))dt = [-t\ln(t) + t]_\epsilon^1 = 1 + \epsilon\ln(\epsilon) - \epsilon \to_{\epsilon\to0} 1$$

BIlan : $\boxed{I = \int_0^1 f(t)dt \text{ converge et } I = 1}$

(b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $k \in [\![1; n+1]\!]$.
La fonction f étant décroissante sur $]0,1]$, on a pour tout $t \in [\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$,

$$f(\frac{k+1}{n}) \leq f(t) \leq f(\frac{k}{n})$$

d'où en intégrant, la fonction f étant continue sur $]0,1]$ et les bornes dans le bon sens,

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k+1}{n})dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k}{n})dt$$

et donc on a bien

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

En sommant pour k variant de 1 à $n-1$, on a d'une part :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k}{n})dt$$

donc par la relation de Chasles

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et en remarquant que $f(\frac{n}{n})=1$, on a

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

D'autre part, en sommant pour k de 1 à $n-1$ dans l'autre inégalité:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$$

et en rajoutant $\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})=\frac{\ln n}{n}$, on obtient bien :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt + \frac{\ln(n)}{n}$$

Bilan : $\boxed{\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt + \frac{\ln(n)}{n}}$

(c) D'après le 9.(a), $\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n} = 0$ (CC), on obtient que :
$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = 1$

Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) = -1}$

(d) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\ln(\frac{(n!)^{1/n}}{n}) &= \frac{1}{n}\ln(n!) - \ln(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(\frac{k}{n}) \to_{n\to+\infty} -1\end{aligned}$$

En passant ensuite à l'exponentielle et en exploitant la continuité de l'exponentielle en -1, on trouve que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^{1/n}}{n} = e^{-1}}$

10. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $\forall t\in]0;+\infty[,\ g(t)=t+\ln(t)+1$. La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout $t>0$, $g'(t)=1+\frac{1}{t}>0$. La fonction g étant continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $g(]0;+\infty[)=]-\infty,+\infty[$. Comme $0\in]-\infty;+\infty[$, il existe bien un unique α appartenant à $]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.

On remarque que $g(e^{-1}) = e^{-1}-1+1 = e^{-1} > 0$, et que $g(e^{-2}) = e^{-2}-2+1 = e^{-2}-1 < 0$. Par conséquent, $g(e^{-2}) < g(\alpha) < g(e^{-1})$, ce qui implique par stricte croissance de g que $e^{-2} < \alpha < e^{-1}$.

PARTIE C : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

11. (a) On considère la fonction h définie par $h(x)=e^{-x}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $h^{(k)}(x)=(-1)^k.e^{-x}$. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à la fonction h entre 0 et x, à l'ordre $2n$, on trouve que :

$$h(x) = \sum_{k=0}^{2n}\frac{h^{(k)}(0)}{k!}.x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}.h^{(2n+1)}(t)dt$$

soit ici

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}.x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}.(-1)^{2n+1}.e^{-x}dt$$

d'où enfin

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}dt$$

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, pour tout $t\in[0,x]$, $\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}.e^{-t}\geq 0$, donc en intégrant avec les bornes dans le bon sens,

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}dt$$

D'autre part, pour tout $t\in[0,x]$, $\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}.e^{-t} \leq \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}$. Donc en intégrant (bornes bon sens) :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}dt \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}dt = [-\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}]_0^x = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Bilan : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}^+,\ 0\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}dt \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$

(c) Comme $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, on a d'une part

$$P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!} = e^{-x} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}dt \geq e^{-x}$$

et d'autre part,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{-x}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}dt - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq e^{-x}$$

On en déduit bien que :

Bilan :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ P_n(x) \leqslant e^{-x} \leqslant P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

12. Soit n un entier de $\mathbb{N}$.

   (a) D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P_{n+1}(x) \leq e^{-x}$, donc $P_{n+1}(u_n) \leq e^{-u_n}$.
   D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x} \leq P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, donc comme $P_n(u_n) = 0$, $e^{-u_n} \leq \frac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   (b) On utilise dans cette question les résultats des questions (3)(b) et (6)(a).
   D'une part,

$$\frac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}.\frac{u_n}{2n+1} \leq \frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!} \text{ car } u_n \leq 2n+1$$

   D'autre part,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(u_n) &= \frac{(u_n)^{2n+2}}{(2n+2)!}.\frac{2n+3-u_n}{(2n+3)!} \\ &= \frac{2.(u_n)^{2n}}{(2n+3)!}.u_n^2.\frac{2n+3-u_n}{2} \\ &\leq \frac{2.(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

   En effet, $u_n \geq 1$ donc $u_n^2 \geq 1$, et $2n+3-u_n \geq 2$, donc $\frac{2n+3-u_n}{2} \geq 1$.

   Bilan : $\boxed{\frac{2(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leqslant e^{-u_n} \leqslant \frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}}$

   En multipliant l'inégalité de droite par $e^{u_n}.(2n)!$, on trouve que $(2n)! \leq (u_n)^{2n}.e^{u_n}$.
   En multpliant l'inégalité de gauche par $e^{u_n}.\frac{(2n+3)!}{2}$, on obtient $(u_n)^{2n}.e^{u_n} \leq \frac{(2n+3)!}{2}$.

   Bilan :

$$\boxed{(2n)! \leqslant (u_n)^{2n} e^{u_n} \leqslant \tfrac{(2n+3)!}{2}}$$

13. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$: $\qquad w_n = \dfrac{u_n}{2n}$.

   (a) On remarque que $w_n.e^{w_n} = \frac{u_n}{2n}.e^{\frac{u_n}{2n}} = \frac{1}{2n}.((u_n)^{2n}.e^{u_n})^{\frac{1}{2n}}$.
   D'après la question précédente, en remarquant de plus que

$$(2n+3)! = (2n+3).(2n+2).(2n+1).(2n)! \leq (2n+1)^3.(2n)!$$

   on obtient bien :

   Bilan :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n e^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}.}$$

   (b) D'après la question 9.(d),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} = e^{-1}$$

   De plus,

$$(\frac{(2n+3)^2}{2})^{\frac{1}{2n}} = e^{\frac{1}{2n}.(3\ln(2n+3)-\ln(2))} \to_{n\to+\infty} e^0 = 1$$

   par croissances comparées, et par continuité de la fonction exp en 0.
   Finalement, par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} w_n.e^{w_n} = e^{-1}$ donc par continuité de la fonction ln, $\lim_{n\to+\infty} \ln(w_n) + w_n = 1$ c'est à dire que $\lim_{n\to+\infty} g(w_n) = 0$.
   La fonction g étant continue, strictement croissante, bijective, la fonction g^{-1} possède les mêmes propriétés et

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} g^{-1}(g(w_n)) = g^{-1}(0) = \alpha$$

   Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \alpha}$

14. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2n} = \alpha$.

   Bilan : $\boxed{u_n \sim_{n\to+\infty} 2\alpha n}$

Remarques sur ce Problème :
Un problème assez costaud !!
Beaucoup de relations à manipuler, c'est long...
Quelques classiques à ne pas rater qui peuvent faire la différence : dichotomie, IAF, Taylor reste intégral... S'accrocher et rester au contact du sujet !!

PROBLEME II - d'après EML 2014

Partie I : Quelques généralités

1. • Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a encore $\Phi_A(M) = AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ainsi Φ_A va bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   • Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi_A(\alpha.M+N) &= A.(\alpha.M+N) - (\alpha.M+N).A \\ &= = \alpha.(AM-MA) + AN - NA = \alpha\Phi_A(M) + \Phi_A(N) \end{aligned}$$

   donc Φ_A est linéaire.

   Bilan : $\boxed{\Phi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

2. $\Phi_A(I_n) = AI_n - I_nA = 0$. Par conséquent $Ker(\Phi_A) \neq \{0\}$ donc Φ_A n'est pas injectif. Comme Φ_A est un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie, Φ_A n'est pas non plus surjectif.
   Bilan : $\boxed{\Phi_A \text{ n'est ni injectif, ni surjectif}}$

Partie II : Étude d'un cas particulier

On suppose, dans cette partie seulement, que $n=2$ et $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}$

1. La matrice A est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont donc égales à ses coefficients diagonaux. Ainsi
$$Spec(A)=\{1,3\}$$
Comme $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et possède deux valeurs propres distinctes, A est diagonalisable.
Bilan : $\boxed{A \text{ est diagonalisable et } Spec(A)=\{1,3\}}$

2.
$$\begin{array}{rcl}\Phi_A(E_{1,1}) &=& -E_{1,2}\\ \Phi_A(E_{1,2}) &=& -2E_{1,2}\\ \Phi_A(E_{2,1}) &=& E_{1,1}+2E_{2,1}-E_{2,2}\\ \Phi_A(E_{2,2}) &=& E_{1,2}\end{array}$$
Ainsi
$$C=Mat_{\mathcal{B}}(\Phi_A)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\-1&-2&0&1\\0&0&2&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$
$$rg(\Phi_A)=rg(C)=Vect(\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix})=Vect(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix})=2$$
En effet, ces deux dernières matrices colonnes ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre.

3. Tout d'abord, comme $rg(\Phi_A)=2$, on a $\dim(Ker(\Phi_A))=2$, donc $0\in Spec(\Phi_A)$.

Utilisons la méthode des réduites de Gauss. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.
$$\begin{array}{rcl}C-\lambda.I_4 &=& \begin{pmatrix}-\lambda&0&1&0\\-1&-2-\lambda&0&1\\0&0&2-\lambda&0\\0&0&-1&-\lambda\end{pmatrix}\\ &\to& \begin{pmatrix}-1&-2-\lambda&0&1\\-\lambda&0&1&0\\0&0&-1&-\lambda\\0&0&2-\lambda&0\end{pmatrix} \quad \text{avec } L_1\leftrightarrow L_2 \text{ et } L_3\leftrightarrow L_4\\ &\to& \begin{pmatrix}-1&-2-\lambda&0&1\\0&\lambda(2+\lambda)&1&-\lambda\\0&0&-1&-\lambda\\0&0&0&-\lambda(2-\lambda)\end{pmatrix} \quad \text{avec } L_2\leftarrow L_2-\lambda.L_1 \text{ et } L_4\leftarrow L_4+(2-\lambda)L_3\end{array}$$
Une matrice est inversible ssi ses réduites le sont. Comme cette dernière matrice obtenue est triangulaire,
$$\lambda\in Spec(C)\Leftrightarrow C-\lambda.I_4 \text{ non inversible } \Leftrightarrow \lambda\in\{-2,0,2\}$$

D'où enfin
$$Spec(\Phi_A)=\{-2,0,2\}$$
Comme $\dim(Ker(\Phi_A))=2$, on a alors
$$\sum_{\lambda\in Spec(\Phi_A)}\dim(Ker(\Phi_A-\lambda.I))=\dim(Ker(\Phi_A))+\dim(Ker(\Phi_A+2I))+\dim(Ker(\Phi_A-2I))\geq 4$$
Mais d'après le cours, $\sum_{\lambda\in Spec(\Phi_A)}\dim(Ker(\Phi_A-\lambda.I))\leq 4$.
Donc nécessairement cette somme est égale à 4 et Φ_A est diagonalisable.

Bilan : $\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable et } Spec(\Phi_A)=\{-2,0,2\}}$

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Supposons que A est diagonalisable. Alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A=P.D.P^{-1}$. D'où en transposant :
$${}^tA={}^tP.D.P^{-1}={}^tP^{-1}.{}^tD.{}^tP=({}^tP)^{-1}.D.{}^tP=Q.D.Q^{-1}$$
où $Q=({}^tP)^{-1}$ est inversible. Par conséquent ${}^tA$ est diagonalisable. Etant associée à la même matrice diagonale D que A, ces deux matrices ont le même spectre.
Bilan : $\boxed{{}^tA \text{ est diagonalisable et } Spec({}^tA)=Spec(A)}$

2. Soient $X,Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ (resp. de ${}^tA$ associé à μ).
$$\begin{array}{rcl}\Phi_A(X.{}^tY) &=& A.X.{}^tY-X.{}^tY.A\\ &=& \lambda.X.{}^tY-X.{}^t({}^tA.Y)\\ &=& \lambda.X.{}^tY-\mu.X.{}^tY\\ &=& (\lambda-\mu).X.{}^tY\end{array}$$
Par ailleurs, posons $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$. Comme $X\neq 0$ et $Y\neq 0$, il existe $i_0\in[[1,n]]$ tel que $x_{i_0}\neq 0$ et il existe $j_0\in[[1,n]]$ tel que $y_{j_0}\neq 0$. Alors $x_{i_0}.y_{j_0}\neq 0$. Par conséquent la matrice carrée $X.{}^tY=(x_i.y_j)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ possède au moins un coefficient non nul. Ainsi $X.{}^tY\neq 0$.
Bilan : $\boxed{X.{}^tY \text{ est un vecteur propre de } \Phi_A, \text{ associé à la valeur propre } \lambda-\mu}$

3. Soient $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ et $(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ On note $\mathcal{F}$ la famille $\mathcal{F}=(X_i\,{}^tY_j)_{(i,j)\in[[1;n]]^2}$.

Soit $(i,j)\in[[1,n]]^2$. Comme $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que
$$V_i=\sum_{k=1}^n\alpha_k.X_k$$
De même, comme $(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe des coefficients $(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que
$$V_j=\sum_{l=1}^n\beta_l.Y_l$$

On a alors

$$\begin{aligned} V_i{}^tV_j &= (\sum_{k=1}^n \alpha_k.X_k).{}^t(\sum_{l=1}^n \beta_l.Y_l) \\ &= (\sum_{k=1}^n \alpha_k.X_k).(\sum_{l=1}^n \beta_l.{}^tY_l) \text{ par linéarité de la transposition} \\ &= \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \alpha_k.\beta_l.X_k.{}^tY_l \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice $V_i{}^tV_j$ appartient bien au s.e.v. engendré par la famille $\mathcal{F}$. D'après le rappel donné en début de sujet, la famille $(E_{i,j}) = (V_i.{}^tV_j)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il s'agit donc d'une famille génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme toute matrice de ce type est combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$, la famille $\mathcal{F}$ est donc aussi génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $Card(\mathcal{F}) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Bilan : $\boxed{\text{la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

4. Comme A est diagonalisable, il existe une base $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.
De même, comme ${}^tA$ est diagonalisable, il existe une base $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de ${}^tA$.
D'après le 2., pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, la matrice $X_i.{}^tY_j$ est un vecteur propre de Φ_A.
D'après le 3., la famille $\mathcal{F} = (X_i.{}^tY_j)_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Par conséquent, il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est formée de vecteurs propres de Φ_A. D'après le cours, Φ_A est diagonalisable.

Bilan : $\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable}}$

5. Chacun des vecteurs de la base $\mathcal{F}$ définie à la question précédente est un vecteur propre de Φ_A. Pour $(i,j) \in [[1,n]]^2$, en notant λ_i la valeur propre de A associée à X_i et μ_j la valeur propre de ${}^tA$ associée à Y_j, d'après le 2. la valeur propre associée à $X_i.{}^tY_j$ est $\lambda_i - \mu_j$.
Comme $Spec({}^tA) = Spec(A)$, on a finalement
Bilan : $\boxed{Spec(\Phi_A) = \{\lambda - \mu;\ \ (\lambda,\mu) \in Spec(A)^2\}}$

Partie IV : Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle

1. Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{H}(k) : \Phi_A\left(T^k\right) = \lambda k T^k$$

On procède par récurrence.
Initialisation : si $k = 0$, $\Phi_A(T^0) = \Phi_A(I) = 0$ et $\lambda.0.T^0 = 0$, donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ un entier fixé tel que $\mathcal{H}(k)$ est vraie.

$$\begin{aligned} AT^{k+1} &= AT.T^k \\ &= (TA + \lambda.T).T^k \\ &= TAT^k + \lambda.T^{k+1} \\ &= T.(T^kA + \lambda.k.T^k) + \lambda.T^{k+1} \text{ par H.R.} \\ &= T^{k+1}A + \lambda.k.T^{k+1} + \lambda.T^{k+1} \\ &= T^{k+1}A + \lambda.(k+1).T^{k+1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie.

Bilan : $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ \Phi_A\left(T^k\right) = \lambda k T^k}$

2. Supposons que les matrices I, T, T^2, ..., T^{n^2} soient toutes non nulles
Alors pour tout $k \in [[0, n^2]]$,
$$\Phi_A\left(T^k\right) = \lambda k T^k$$
donc les réels $\lambda.k$ sont tous valeurs propres de Φ_A. Comme $\lambda \neq 0$, Φ_A possède donc n^2+1 valeurs propres distinctes. Mais Φ_A est un endomorphisme de l'e.v. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension n^2, donc possède au plus n^2 valeurs propres distinctes. Ceci est absurde.

Bilan : $\boxed{\text{il existe } k \in [[0,n^2]] \text{ tel que } T^k = 0}$

On note p l'entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$.

3. Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice T^{p-1}. Comme $T^{p-1} \neq 0$, f n'est pas l'endomorphisme nul, donc il existe un vecteur u tel que $f(u) \neq 0$. En revenant aux notations matricielles, cela signifie qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$tel que $T^{p-1}X \neq 0$.

On considère la famille $\mathcal{D} = (X, TX, \cdots, T^{p-1}X)$. Comme $T^{p-1}X \neq 0$, on a bien sûr $X \neq 0$.
Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que
$$\lambda_0.X + \lambda_1.TX + \cdots + \lambda_{p-1}T^{p-1}X = 0 \qquad (*)$$
En multipliant $(*)$ par T^{p-1}, on obtient
$$\begin{aligned} & \lambda_0.T^{p-1}X + \lambda_1.T^pX + \cdots + \lambda_{p-1}.T^{2p-2}X = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda_0.T^{p-1}X = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = 0 \text{ puisque } T^{p-1}X \neq 0 \end{aligned}$$
puis en multipliant $(*)$ par T^{p-2} : $\lambda_1.T^{p-1}X = 0$ donc $\lambda_1 = 0$, etc...
Finalement il reste $\lambda_{p-1}.T^{p-1}X = 0$, donc $\lambda_{p-1} = 0$.
Ainsi $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$ donc la famille $\mathcal{D}$ est libre.

Remarque : preuve plus rigoureuse, mais plus lourde, par récurrence.

Finalement, comme $\mathcal{D}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $Card(\mathcal{D}) \leq n$.

Bilan : $\boxed{p \leq n}$

Si T est un vecteur propre de Φ_A, T est donc une matrice nilpotente d'indice de nilpotence inférieur ou égal à n.

Partie V : Etude d'un deuxième exemple

1. (a) On utilise la méthode des réduites de Gauss.

$$\begin{array}{rcll} A-\lambda I_3 & = & \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 3-\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{en permutant les lignes} \\ & \to & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda+2 & -3+2\lambda \\ 0 & -\lambda+2 & -\lambda^2+5\lambda-5 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \leftarrow L_3-(3-\lambda)L_1 \\ & \to & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda+2 & -3+2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda-2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{array}$$

Une matrice est inversible si et seulement si ses réduites le sont. La dernière matrice étant triangulaire, elle n'est pas inversible ssi $-\lambda+2=0$ ou $-\lambda^2+3\lambda-2=0$, ssi $\lambda=1$ ou $\lambda=2$.

Bilan : $\boxed{Spec(A)=\{1,2\}}$

Comme $0 \notin Spec(A)$, A est inversible et $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3}$

(b) Déterminons les deux sous-espaces propres de A.

- Soit $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} X \in Ker(A-I) & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x=0 \text{ et } y=z \end{array}$$

Donc $Ker(A-I)=Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. En particulier, $\dim(Ker(A-I))=1$.

- Soit $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} X \in Ker(A-2I) & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x=y \\ z=0 \end{array} \right. \end{array}$$

Donc $Ker(A-2I)=Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. En particulier, $\dim(Ker(A-2I))=1$.

Ainsi

$$\sum_{\lambda \in Spec(A)} \dim(Ker(A-\lambda.I)) = \dim(Ker(A-I)) + \dim(Ker(A-2I)) = 2 \neq 3$$

donc A n'est pas diagonalisable.

Bilan : $\boxed{\text{A n'est pas diagonalisable}}$

Remarque : on aurait pû se contenter de calculer le rang de $A-I$ et de $A-2I$. Cependant les bases des sous-espaces propres vont nous servir dans la question suivante...

2. (a) On choisit les vecteurs $u_1=(0,1,1)$ et $u_2=(1,1,0)$ obtenus précédemment. On sait que $f(u_1)=u_1$ et que $f(u_2)=2u_2$ puisqu'il s'agit de vecteurs propres associés aux valeurs propres 1 et 2.
Montrons rapidement que la famille $\mathcal{B}'=(u_1,u_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$rg\ Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}') = rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Cette matrice est bien inversible, et $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $f(u_1)=u_1$, $f(u_2)=2u_2$ et

$$f(e_3)=(1,1,2)=0.(0,1,1)+1.(1,1,0)+2.(0,0,1)=0.u_1+1.u_2+2.e_3$$

on obtient bien

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f)=T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) D'après le théorème de changement de base, la matrice

$$Q=Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}')=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie bien $A=QTQ^{-1}$.

3. (a) Notons $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors :

- D diagonale, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$
- $N^2=0$, donc pour tout $k \geq 2$, $N^k=0$
- $DN=2N=ND$

Comme N et D commutent, par la formule du binôme, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rcl} T^k & = & \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i.D^{n-i} \\ & = & \binom{k}{0} D^k + \binom{k}{1} N.D^{k-1} = D^k + k.2^{k-1}N \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k.2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Avec

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On montre aisément que la famille (I, T, T^2) est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors

$$M \in \text{Ker}(\Phi_T) \Leftrightarrow TM = MT$$

Notons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}
M \in \text{Ker}(\Phi_T) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 2b \\ c = b + 2c \\ 2d + g = d \\ 2e + h = 2e \end{cases} \qquad \begin{cases} 2f + i = e + 2f \\ 2g = g \\ 2h = 2h \\ 2i = h + 2i \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = c = d = g = h = 0 \\ e = i \end{cases} \\
&\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$Ker(\Phi_T) = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

et on en déduit aisément que $\dim(Ker(\Phi_T)) = 3$.

Par ailleurs, la famille (I, T, T^2) est libre et formée de vecteurs de $Ker(\Phi_T)$. Comme de plus $Card(I, T, T^2) = 3 = \dim(Ker(\Phi_T))$, la famille (I, T, T^2) est une base de $Ker(\Phi_T)$.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
M \in \text{Ker}(\Phi_A) &\Leftrightarrow AM = MA \\
&\Leftrightarrow QTQ^{-1}M = MQTQ^{-1} \\
&\Leftrightarrow T.Q^{-1}MQ = Q^{-1}MQ.T \\
&\Leftrightarrow Q^{-1}MQ \in Ker(\Phi_T) \\
&\Leftrightarrow Q^{-1}MQ = \alpha.I + \beta.T + \gamma.T^2 \ \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \\
&\Leftrightarrow M = \alpha.I + \beta.QTQ^{-1} + \gamma.Q.T^2.Q^{-1} \\
&\Leftrightarrow M = \alpha.I + \beta.A + \gamma.A^2
\end{aligned}$$

et donc $\text{Ker}(\Phi_A) = Vect(I, A, A^2)$. Il reste à montrer pour finir que la famille (I, A, A^2) est libre.
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
\alpha.I + \beta.A + \gamma.A^2 = 0 &\Leftrightarrow \alpha.Q^{-1}IQ + \beta.Q^{-1}.A.Q + \gamma.Q^{-1}.A^2.Q = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha.I + \beta.T + \gamma.T^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \ \text{ par liberté de } \ (I, T, T^2)
\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{(I, A, A^2) \text{ est une base de } \text{Ker}(\Phi_A)}$