DM n° 5 - pour le mardi 25 novembre 2024

<u>Exercices en auto-correction</u> : Exercices 9 et 12 du TD sur les VAR discrètes.
Calculs classiques à savoir faire et refaire : $P(X = Y)$, $P(X > Y)$, loi de min, loi de Max, loi de $X + Y$.
Auto-correction avec le corrigé qui sera donné mardi prochain.

Un problème de concours sur les VARD

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ième tirage.

En particulier, on a $X_0 = 1$. On admet que pour tout entier k, X_k est une variable aléatoire sur $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$.

Partie A

1. Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.
2. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :
$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}$$
3. Préciser, pour tout entier naturel k, l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i])$.
(On distinguera différents cas selon les valeurs relatives de i et j).
5. Déduire de ce qui précède que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2}\,\mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2}\,\mathbb{P}([X_k = i-1]) \qquad (*)$$
6. À l'aide de la formule (*) déterminer la loi de X_3.
7. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}([X_k = 1]) = \dfrac{1}{(k+1)!}$
(b) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}([X_k = k+1])$
(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}([X_k = 2])$
Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.
Montrer que la suite $(b_k)_{k\geqslant 0}$ définie par : $\forall k \in\ \mathbb{N}, b_k = a_k + k + 2$ est géométrique.
En déduire alors que : $\forall k \in\ \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_k = 2]) = \frac{2^{k+1}-k-2}{(k+1)!}$.

Partie B

1. Que renvoie la fonction Python suivante pour un entier k non nul ?
Détailler le fonctionnement de la ligne 5.

```
1. def mystere(k) :
2.     n=1
3.     b=1
4.     for i in range(1,k+1):
5.         r=np.floor(rd.random()*(n+b)+1)
6.         if r>n :
7.             n=n+1
8.         else :
9.             b=b+1
10.    return b
```

2. <u>Loi expérimentale</u>
Ecrire une fonction Python d'en-tête `def LoiExpe(k,N):` qui prend en entrée un entier strictement positif k et un entier N, qui effectue N simulations de k tirages successifs dans l'urne et qui retourne une matrice ligne qui contient une estimation de la loi de X_k. C'est-à-dire que si l'on tape `L=LoiExpe(k,N)`, alors pour chaque $i \in [[0,k]]$, `L[i]` contient la fréquence d'apparition de l'événement $[X_k = i+1]$ au cours des N simulations).
On pourra utiliser la fonction `mystere`.

3. <u>Loi théorique</u>
Recopier et compléter la fonction `LoiTheo` suivante, qui prend en entrée un entier strictement positif n, afin qu'elle retourne une matrice ligne qui contient la loi théorique de X_n.

```
def LoiTheo(n):
    M=np.zeros([n+1,n+1])
    M[0,0]=1     #P(X_0=1)=1
    M[1,0]=1/2    #P(X_1=1)=1/2
    M[1,1]=1/2    #P(X_1=2)=1/2
    for k in range(1,n) :
        M[k+1,0]=......
        for i in range(1,k+1) :
            M[k+1,i]=.......
    M[k+1,k+1]=......
   return M[n,:]
```

4. Un étudiant nous propose comme loi de X_5 le résultat suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}([X_5 = k])$	0.001368	0.079365	0.419434	0.418999	0.079454	0.00138

A-t-il utilisé `LoiExpe` ou bien `LoiTheo` ?

Partie C

1. (a) À l'aide de la formule (*), montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E\left(X_{k+1}\right) = \frac{k+1}{k+2} E\left(X_k\right) + 1$$

   (b) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E\left(X_k\right) = \frac{k+2}{2}$$

   (c) Soit Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne après k tirages.
   Justifier que X_k et Y_k ont même espérance, puis retrouver le résultat de la question précédente.

   On admettra pour la suite que :

$$\forall k \in\ \mathbb{N}^*, V\left(X_k\right) = \frac{k+2}{12}$$

2. (a) Rappel de cours : inégalité de Bienaymé-Tchebychev
   Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
   Supposons que la variable X admet un moment d'ordre 2. Alors

$$\forall \epsilon > 0,\quad P(|X - E(X)| \geq \epsilon)\ \leq\ \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

   Soit $\alpha > 0$. Montrer que :

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\mathbb{P}\left(\left| \frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2} \right| < \alpha \right) \right) = 1.$$

   (b) Interpréter ce résultat et le justifier intuitivement.

Partie D

1. Pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant j < i$, on définit l'application $\varphi_{i,j}$ par .

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{i,j} : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & \varphi_{i,j}(P) = \ jP(X+1) - iP(X) \end{array}$$

   (a) Montrer que $\varphi_{i,j}$ est linéaire.
   (b) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $\deg\left(\varphi_{i,j}(P)\right) = \deg(P)$
   (c) En déduire que $\varphi_{i,j}$ est injective.
   (d) Montrer que pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi_{i,j}(Q) = P$.
   (*Pour P non nul, on pourra s'intéresser à la restriction de $\varphi_{i,j}$ à $\mathbb{R}_n[X]$ où n est le degré de P*).

   Ce qui précède montre que $\varphi_{i,j}$ est un automorphisme. On définit le polynôme $P_{i,j}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant j \leqslant i$, en posant

$$P_{1,1}(X) = 1, \quad \text{et pour } 1 \leqslant j < i, \quad P_{i,j}(X) = \varphi_{i,j}^{-1}\left((3 + X - i)P_{i-1,j}(X)\right)$$

   et enfin pour tout entier $i > 1$,

$$P_{i,i}(X) = -\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0)$$

2. (a) Vérifier que : $P_{2,1}(X) = -X - 2$, puis calculer $P_{2,2}(X)$
   (b) Vérifier que : $P_{3,2}(X) = -2X - 4$.

   On admettra dans la suite que : $P_{3,1}(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1$ et $P_{3,3}(X) = 3$.

3. On considère, pour tout entier i de $\mathbb{N}^*$, la propriété suivante .

$$\mathcal{H}_i : \text{"}\forall k \in\ \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left([X_k = i]\right) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k) j^k\ \text{"}$$

   On souhaite montrer par récurrence que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_i$ est vraie.

   (a) Montrer que $\mathcal{H}_1$ est vraie.
   (b) Soit $i > 1$. On suppose que $\mathcal{H}_{i-1}$ est vraie et on pose :

$$\forall k \in\ \mathbb{N}, \quad \alpha_k = (k+1)!\ \mathbb{P}\left([X_k = i]\right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k$$

   En utilisant la formule (*) et la relation $(3 + X - i)P_{i-1,j}(X) = \varphi_{i,j}\left(P_{i,j}(X)\right)$ montrer que la suite $(\alpha_k)_{k \geqslant 0}$ est géométrique.
   Déterminer α_0 puis en déduire $\mathcal{H}_i$ que est vraie.
   (c) Conclure.

4. (a) En utilisant le résultat de la question 15(a), retrouver le. résultat de la question 7(c).
   (b) Déterminer $\mathbb{P}\left([X_k = 3]\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

• FIN •