Corrigé du Concours Blanc 1 - Sujet facultatif type HEC/ESSEC
vendredi 8 novembre 2024 - DS n°3 bis

On pose : $E_0 = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), f \text{ bornée sur } \mathbb{R}\}$.
Si $f \in E_0$, on notera $N_0(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Partie I - Propriétés de la fonction arctan.

On rappelle que la fonction arctan est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
2. La fonction arctan est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $I =]\lim_{x\to-\infty}\arctan(x), \lim_{x\to+\infty}\arctan(x)[=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\arctan'(x)| = \frac{1}{1+x^2} \le 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on peut donc dire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|\arctan x - \arctan y| \le |x-y|$.
4. Posons, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. La fonction g est dérivable sur cet intervalle par composée et somme de fonctions dérivables. On a pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}.\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

La fonction g est donc constante sur <u>l'intervalle</u> $]0;\infty[$. De plus, $g(1) = 2\arctan(1) = 2.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

<u>Bilan :</u> $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$

Si $f \in E_0$, on définit, sous réserve d'existence,

$$\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \arctan(tx).\frac{f(t)}{1+t^2}dt$$

L'objectif du problème est d'obtenir quelques propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ.

Partie II - Premières propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ.

5. Montrons que E_0 est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   - $E_0 \subset C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par définition.
   - La fonction nulle est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, donc $0_{C^0(\mathbb{R})} \in E_0$.
   - Soit f et g deux éléments de E_0, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Tout d'abord la fonction $\alpha.f+g$ est encore continue sur $\mathbb{R}$. Comme f et g sont bornées, il existe deux réels $M > 0$ et $N > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$|f(x)| \le M \text{ et } |g(x)| \le N$$
   Par inégalité triangulaire, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$|\alpha.f(x) + g(x)| \le |\alpha|.|f(x)| + |g(x)| \le |\alpha|.M + N$$
   donc la fonction $\alpha.f+g$ est bornée. Elle appartient donc bien à E_0.

<u>Bilan :</u> $\boxed{E_0 \text{ est un s.e.v. de } C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

6. Soit $f \in E_0$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\arctan(tx)| \le \frac{\pi}{2}$ et $|f(t)| \le N_0(f)$, donc

$$|\arctan(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}| \le \frac{\pi}{2}.N_0(f).\frac{1}{1+t^2}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente et vaut

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{A\to+\infty} [\arctan(t)]_0^A = \frac{\pi}{2}$$

Par critère de majoration, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \arctan(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}dt$ est absolument convergente.

7. Soit $f \in E_0$. En intégrant la majoration précédente, les intégrales étant toutes convergentes, on trouve que

$$\int_0^{+\infty} |\arctan(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}dt| \le \frac{\pi}{2}.N_0(f).\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}N_0(f)$$

puis par inégalité triangulaire,

$$|\Phi(f)(x)| = |\int_0^{+\infty} \arctan(tx).\frac{f(t)}{1+t^2}dt| \le \int_0^{+\infty} |\arctan(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}|dt \le \frac{\pi^2}{4}N_0(f)$$

<u>Bilan :</u> $\boxed{\Phi(f) \text{ est bornée et } N_0[\Phi(f)] \le \frac{\pi^2}{4}N_0(f)}$

8. <u>Etude de la continuité de $\Phi(f)$ pour $f \in E_0$</u>
Dans cette question, f désigne un élément de E_0 et x un réel.
   (a) Soit x, A et h sont trois réels. On suppose que A est strictement positif et que h n'est pas nul.
   $|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| = |\int_0^{+\infty} \arctan(t(x+h))\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \arctan(tx)\,\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t|$
   $|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)}{1+t^2}f(t)\mathrm{d}t\right|$.
   $\forall t \in \left[0,+\infty\right[, \left|\frac{\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)}{1+t^2}f(t)\right| = \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}|f(t)|$.
   $\forall t \in \left[0,+\infty\right[, \left|\frac{\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)}{1+t^2}f(t)\right| \leqslant \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}N_0(f)$.
   Par inégalité triangulaire (les intégrales en jeu étant toutes convergentes),
   $$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)}{1+t^2}f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)}{1+t^2}f(t)\right|\mathrm{d}t$$
   Alors : $|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leqslant N_0(f)\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
   Chasles permet alors de majorer $|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)|$ par :
   $N_0(f)\left(\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)$.
   (b) D'une part, $\forall t \in [0,A], |\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)| \leqslant |t(x+h)-tx| = |h|t$ et $\frac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ d'après 4). Donc
   $\forall t \in [0,A], \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2} \leqslant |h|\frac{t}{1+t^2}$ et $A > 0$.
   Alors $\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant |h|\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
   D'autre part, $\forall t \in [A,+\infty[$,
   $$|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)| \leqslant |\arctan(t(x+h))| + |\arctan(tx)| \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$
   Alors $\int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \pi\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Ainsi :
   $\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant |h|\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \pi\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

$N_0(f) \in \left[0,+\infty\right[$ donc $N_0(f)\left(\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)$ est majoré par $N_0(f)\left(|h|\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \pi\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)$.

Bilan : $\boxed{|[\Phi(f)](x+h)-[\Phi(f)](x)| \leqslant N_0(f)\left(|h|\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \pi\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)}$

(c) On remarque que, pour tout $A>0$,

$$\int_0^A \frac{t}{1+t^2}dt = [\frac{1}{2}\ln(1+t^2)]_0^A = \frac{1}{2}\ln(1+A^2)$$

et que

$$\int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}dt = \lim_{B\to+\infty}[\arctan(t)]_A^B = \frac{\pi}{2} - \arctan(A) = \arctan(1/A) \text{ d'après le 4)}$$

Soit $h \in \mathbb{R}^*$, en choisissant $A = \frac{1}{|h|}$, on a alors :

$$\begin{aligned} |[\Phi(f)](x+h)-[\Phi(f)](x)| &\leq N_0(f).(|h|\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{h^2}) + \pi\arctan(|h|)) \\ &\leq |h|\frac{N_0(f)}{2}\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi N_0(f)\arctan|h| \end{aligned}$$

(d) Soit x un réel fixé. Comme $\lim_{h\to 0}|h|\frac{N_0(f)}{2}\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi N_0(f)\arctan|h| = 0$, on a par encadrement $\lim_{h\to 0}\Phi(f)(x+h) = \Phi(f)(x)$.

Bilan : $\boxed{\Phi(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

(e) D'après ce qui précède, si $f \in E_0$, alors la fonction $\Phi(f)$ est bornée et continue sur $\mathbb{R}$, donc $\Phi(f) \in E_0$. La fonction Φ va donc de E_0 dans E_0.
Par ailleurs, la linéarité de Φ est facile à montrer (à faire rapidement).

Bilan : $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E_0}$

Partie III - Etude d'un exemple.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'application

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}dt$$

Autrement dit, g est l'image par Φ de l'application constante égale à 1 : $x \in \mathbb{R} \mapsto 1$.

9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(-tx)}{1+t^2}dt = -\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}dt \quad \text{par imparité de la fonction} \quad \arctan$$

donc $g(-x) = -g(x)$ et $\boxed{g \text{ est impaire}}$

10. Etude de la dérivabilité de g sur $]0,+\infty[$
Soit x un réel strictement positif.

(a) Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\arctan'(u) = \frac{1}{1+u^2}$ puis

$$|\arctan''(u)| = |-\frac{2u}{(1+u^2)^2}| = \frac{2|u|}{(1+u^2)^2}$$

Comme $(1-|u|)^2 \geq 0$, on a $1-2|u|+u^2 \geq 0$ donc $2|u| \leq 1+u^2$ (*astuce classique*), donc

$$|\arctan''(u)| \leq \frac{1+u^2}{(1+u^2)^2} \Rightarrow |\arctan''(u)| \leq \frac{1}{1+u^2}$$

(b) Soit a et b deux réels distincts et I le segment d'extrémités a et b. Pour tout $u \in I$, $|\arctan''(u)| \leq \frac{1}{1+u^2}$. La fonction $u \mapsto |\frac{1}{1+u^2}|$ étant continue sur le segment I, elle est bornée et atteint ses bornes sur I, elle possède donc un maximum sur I. On a alors pour tout $u \in I$, $|\arctan''(u)| \leq \max_{u\in I}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée à la fonction arctan à l'ordre 1, on a alors. :

$$|\arctan(b) - \arctan(a) - (b-a).\arctan'(a)| \leq \max_{u\in I}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)$$

Bilan : $\boxed{\left|\arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2}\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}\max_{u\in I}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)}$

(c) Soit $h \in]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}[$ et t un réel positif. En notant $a = tx$, $b = tx+th$, et en notant encore I l'intervalle d'extrémités a et b, on a d'après la question précédente :

$$|\arctan[t(x+h)] - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2}| \leq \frac{t^2h^2}{2}\max_{u\in I}(\frac{1}{1+u^2})$$

De plus, comme $x>0$, par définition de h et t, on a pour tout $u \in I$,

$$0 < t.\frac{x}{2} \leq tx - t|h| \leq u \leq tx + t|h| \leq t.\frac{3}{2}x$$

La fonction $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$ étant décroissante sur $]0;\infty[$, on a alors pour tout $u \in I$,

$$\frac{1}{1+u^2} \leq \frac{1}{1+(t.\frac{x}{2})^2} \leq \frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}$$

Bilan : $\boxed{|\arctan[t(x+h)] - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2}| \leq \frac{t^2h^2}{2}.\frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}}$

(d) Pour tout $h \in]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}[$,

$$\begin{aligned} &\left|g(x+h) - g(x) - h\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)}\frac{1}{(1+t^2)}dt\right| \\ = &\ |\int_0^{+\infty}\frac{\arctan[t(x+h)]}{1+t^2} - \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} - \frac{th}{1+t^2x^2}.\frac{1}{1+t^2}dt| \\ &\text{par linéarité, intégrales toutes convergentes} \\ \leq &\ |\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2.}|\arctan[t(x+h)] - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2}|dt \text{ par inégalité triangulaire} \\ \leq &\ \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}.\frac{t^2h^2}{2}.\frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}dt \text{ d'après la question précédente} \\ \leq &\ 2h^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(4+t^2x^2)}\frac{1}{(1+t^2)}dt \text{ en réarrangeant un peu} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\left|g(x+h) - g(x) - h\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)}\frac{1}{(1+t^2)}dt\right| \leq 2h^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(4+t^2x^2)}\frac{1}{(1+t^2)}dt}$

(e) Soit $x>0$. Soit $h \in]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}[$, avec h non nul. On divise l'inégalité précédente par $|h|$:

$$|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)}\frac{1}{(1+t^2)}dt| \leq 2|h|.\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(4+t^2x^2)}\frac{1}{(1+t^2)}dt$$

Comme le membre de droite tend vers 0 lorsque h tend vers 0, on trouve par encadrement que $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)}\frac{1}{(1+t^2)}dt$.

Bilan : $\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[}$ et pour tout $x>0$,

$\boxed{g'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}dt}$

(f) Pour tout $x<0$, $g(x)=-g(-x)$ par imparité de g. Comme la fonction $x\mapsto -x$ est dérivable sur $]-\infty,0[$, à valeurs dans $]0;+\infty[$, par composition la fonction $x\mapsto g(-x)$ est dérivable sur $]-\infty,0[$. On en déduit que $x\mapsto -g(-x)=g(x)$ est dérivable sur $]-\infty,0[$.

Bilan : $\boxed{g \text{ est dérivable sur }]-\infty,0[}$ et pour tout $x<0$,

$\boxed{g'(x)=-(-g'(-x))=g'(-x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}dt}$

11. Calcul de $g'(x)$ pour $x>0$.

(a) D'après les résultats précédents, $g'(1)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)^2}dt$. Soit $A>0$.

$$\begin{aligned}\int_0^A\frac{t}{(1+t^2)^2}dt &= [-\frac{1}{2}.\frac{1}{1+t^2}]_0^A\\ &= -\frac{1}{2}.\frac{1}{1+A^2}+\frac{1}{2}\rightarrow_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{g'(1)=\frac{1}{2}}$

(b) Soit $x\in]0,1[\cup],+\infty[$.

$$\begin{aligned}A(x)\frac{t}{1+t^2x^2}+B(x)\frac{t}{1+t^2} &= \frac{t.(1+t^2).A(x)+y.(1+t^2x^2).B(x)}{(1+t^2x^2).(1+t^2)}\\ &= \frac{t.(Ax)+B(x))+t^3.(A(x)+x^2.B(x))}{(1+t^2x^2).(1+t^2)}\end{aligned}$$

Pour obtenir le résultat souhaité, il suffit d'avoir :

$$\begin{cases}A(x)+B(x)=1\\ A(x)+x^2.B(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A(x)=1-B(x)\\ 1-B(x)+x^2.B(x)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}A(x)=-\frac{x^2}{1-x^2}\\ B(x)=\frac{1}{1-x^2}\end{cases}\quad\text{possible puisque }\ x^2\neq 1$$

Avec ces valeurs de $A(x)$ et $B(x)$, on a bien :

$$\boxed{\text{pour tout } t\in\mathbb{R},\ \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}=A(x)\frac{t}{1+t^2x^2}+B(x)\frac{t}{1+t^2}}$$

(c) Soit toujours $x>0$. **Attention**, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}dt$ étant **divergente** (critère d'équivalence), on ne peut pas intégrer immédiatement dans la relation précédente et utiliser la linéarité !
Soit $C>0$. En intégrant dans la relation précédente, on obtient :

$$\int_0^C\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}dt=A(x)\int_0^C\frac{t}{1+t^2x^2}dt+B(x)\int_0^C\frac{t}{1+t^2}dt$$

D'une part,

$$\int_0^C\frac{1}{1+t^2}dt=[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)]_0^C=\frac{1}{2}\ln(1+C^2)$$

et d'autre part,

$$\int_0^C\frac{t}{1+t^2x^2}=[\frac{1}{2x^2}\ln(1+t^2x^2)]_0^X=\frac{1}{2x^2}\ln(1+C^2x^2)$$

D'où

$$\begin{aligned}&\int_0^C\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}dt\\ &= -\frac{x^2}{1-x^2}.\frac{1}{2x^2}\ln(1+C^2x^2)+\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{2}\ln(1+C^2)\\ &= \frac{1}{2.(1-x^2)}.(-\ln(1+C^2.x^2)+\ln(1+C^2))\\ &= \frac{1}{2.(1-x^2)}.\ln(\frac{1+C^2}{1+C^2.x^2})\end{aligned}$$

Comme $x>0$, $\frac{1+C^2}{1+C^2.x^2}\sim_{C\to+\infty}\frac{C^2}{C^2.x^2}=\frac{1}{x^2}$. Par continuité de la fonction ln, on a finalement

$$\lim_{C\to+\infty}\int_0^C\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}dt=\frac{1}{2.(1-x^2)}.\ln(\frac{1}{x^2})=-\frac{\ln(x)}{1-x^2}$$

Bilan : $\boxed{\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ g'(x)=\frac{\ln(x)}{x^2-1}}$

(d) Nous avons déjà vu que g est continue sur $]0;+\infty[$, dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. De plus g' est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ d'après l'expression précédente, g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$. Enfin,

$$g'(x)=\frac{\ln(x)}{x^2-1}=\frac{\ln(x)}{x-1}.\frac{1}{x+1}\rightarrow_{x\to1}1.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\quad\text{(limite usuelle)}$$

Enfin, par le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;\infty[$ et que $g'(1)=\frac{1}{2}$.

Bilan : $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$

12. Une nouvelle expression de $g(x)$ pour $x>0$.

(a) Nous venons de voir que la fonction g' est continue sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x>0$, pour tout $\epsilon>0$, on a alors

$$\int_\epsilon^x\frac{\ln t}{t^2-1}dt=\int_\epsilon^x g'(t)dt=g(x)-g(\epsilon)$$

Nous avons vu que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue en 0, donc $\lim_{\epsilon\to0}\int_\epsilon^x\frac{\ln t}{t^2-1}dt=g(x)-g(0)=g(x)\in\mathbb{R}$ (puisque $g(0)=0$), ce qui montre la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x\frac{\ln t}{t^2-1}dt$.

(b) Soit $x>0$. Le calcul de la question précédente nous donne :

$$\boxed{\int_0^x\frac{\ln t}{t^2-1}dt=g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}dt}$$

13. Etude de la limite de g en $+\infty$.

(a) On sait que pour tout $u>0$, $\arctan(u)=\frac{\pi}{2}-\arctan(1/u)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}g(x) &= \int_0^{+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(\frac{1}{tx})}{1+t^2}dt\\ &= \frac{\pi}{2}.\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt\\ &= \frac{\pi^2}{4}-\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt\end{aligned}$$

(b) Soit $x>0$. Conformément à l'énoncé, on commence par remarquer que d'après la relation de Chasles,

$$\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$$

D'une part, la fonction arctan étant majorée par $\frac{\pi}{2}$,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan(\frac{1}{tx}).\frac{1}{1+t^2}dt\le\frac{\pi}{2}.\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}.\arctan(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

Mais d'après la question 3., pour tout $x>0$, $|\arctan(x)-\arctan(0)|\le|x-0|$, c'est-à-dire que $\arctan(x)\le x$. Donc ici,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan(\frac{1}{tx}).\frac{1}{1+t^2}dt\le\frac{\pi}{2}.\frac{1}{\sqrt{x}}$$

D'autre part, en majorant $\arctan(\frac{1}{tx})$ par $\frac{1}{tx}$,

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt\le\frac{1}{x}.\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\frac{1}{t}.\frac{1}{1+t^2}dt$$

On obtient ainsi (les termes étant tous positifs) la première majoration souhaitée :

$$\left|\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt\right|\le\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\frac{1}{t}.\frac{1}{1+t^2}dt$$

Dans cette dernière intégrale, $t\ge\frac{1}{\sqrt{x}}$, donc $\frac{1}{t}\le\sqrt{x}$. On en déduit que

$$\frac{1}{x}.\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\frac{1}{t}.\frac{1}{1+t^2}dt\le\frac{1}{\sqrt{x}}.\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$$

Cette dernière intégrale vérifie

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt\le\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\frac{1}{x}.\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\frac{1}{t}.\frac{1}{1+t^2}dt\le\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{\pi}{2}$$

D'où le résultat souhaité.

Bilan : $\boxed{|\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt|\le\frac{\pi}{\sqrt{x}}}$

(c) Par encadrement, on en déduit immédiatement que $\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}dt=0$. D'où d'après le 13.a., $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\frac{\pi^2}{4}$

Bilan : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=\frac{\pi^2}{4}}$

14. Application au calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

(a) On remarque que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1-t^2}dt=-\int_0^{+\infty}g'(t)dt$. Soit $C>0$.

$$\int_0^C\frac{\ln t}{1-t^2}dt=-g(C)+g(0)\to_{C\to+\infty}-\frac{\pi^2}{4}$$

Bilan : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1-t^2}dt$ converge et

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1-t^2}dt=-\frac{\pi^2}{4}}$$

(b) Notons $I=\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt$. Cette intégrale est convergente. Posons $u=\frac{1}{t}$. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante sur $]0,1[$, bijective de $]0,1[$ sur $]1;+\infty[$. Le CDV est donc autorisé.

Bornes : $\left\{\begin{array}{l}1\\0\end{array}\right.\to\left\{\begin{array}{l}1\\+\infty\end{array}\right.$

et $t=\frac{1}{u}$ donc $dt=-\frac{1}{u^2}du$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}I&=-\int_{+\infty}^1\frac{\ln(1/u)}{1-(\frac{1}{u})^2}.\frac{1}{u^2}du\\&=\int_1^{+\infty}-\frac{\ln(u)}{u^2-1}du\\&=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(u)}{1-u^2}du\end{aligned}$$

On a alors par la relation de Chasles,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1-t^2}dt=\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{1-t^2}dt=2.\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt$$

Bilan : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1-t^2}dt=2\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt}$

(c) L'intégrale $\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt$ étudiée précédemment est convergente, l'intégrale $\int_0^1\ln(t)\ dt$ est convergente également (et vaut -1 : cf exemple de cours !). Les intégrales $\int_0^1 t^{2k}\ln t dt$ où $k\in\mathbb{N}^*$ sont faussement impropres donc convergentes. Enfin, l'intégrale $\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}dt$ est faussement impropre en 0 et en 1, $\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\sim_{t\to1}\frac{\ln(t)}{1-t^2}$ et on sait que $\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt$ converge.

Finalement toutes les intégrales en jeu sont convergentes. Le calcul est de façon très classique une application de la formule donnant $\sum q^k$...

Dans mon extrême générosité, je tape le calcul :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n\int_0^1 t^{2k}\ln t dt&=\int_0^1\ln(t).\sum_{k=0}^n(t^2)^k dt\\&=\int_0^1\ln(t).\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}dt\\&=\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt-\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}dt\end{aligned}$$

Bilan :

$$\boxed{\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt=\sum_{k=0}^n\int_0^1 t^{2k}\ln t dt+\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}dt}$$

(d) Soit $\epsilon\in]0,1[$. Posons

$$\left\{\begin{array}{l}u(t)=\ln(t)\\v'(t)=t^{2n}\end{array}\right.\to\left\{\begin{array}{l}u'(t)=\frac{1}{t}\\v(t)=\frac{1}{2n+1}.t^{2n+1}\end{array}\right.$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, 1]$, on peut intégrer par parties.

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^1 t^{2n}\ln t dt &= [\frac{1}{2n+1}.t^{2n+1}.\ln(t)]_\epsilon^1 - \frac{1}{2n+1}.\int_\epsilon^1 t^{2n}dt \\ &= -\frac{1}{2n+1}.\epsilon^{2n+1}.\ln(\epsilon) - \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2}.\epsilon^{2n+1} \\ &\to_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{(2n+1)^2} \text{ par croissances comparées}\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\int_0^1 t^{2n}\ln t dt = -\frac{1}{(2n+1)^2}}$

(e) Notons $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1-t^2}.t^2$. La fonction f est continue sur $]0,1[$, et elle est également prolongeable par continuité en 0, puisque $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ (croissances comparées), et en 1 puisque $\lim_{t\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$ (limite classique utilisée avant). Finalement, f est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$, il s'agit donc d'une fonction bornée sur ce segment : il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $t \in]0,1[$, $|f(t)| \leq M$.
On a alors pour tout $n \geq 1$,

$$|\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}dt| \leq \int_0^1 |\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}|dt \leq M.\int_0^1 \int_0^1 t^{2n}dt \leq M.\frac{1}{2n+1}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} M.\frac{1}{2n+1} = 0$, on a finalement par encadrement $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}dt = 0$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2n+1)^2} &= -\sum_{k=0}^n \int_0^1 t^{2k}\ln t dt \\ &= -\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}dt \\ &\to_{n\to+\infty} -\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}dt \\ &= \frac{\pi^2}{8} \text{ d'après les questions précédentes}\end{aligned}$$

Bilan provisoire : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

De plus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n^2}$$

donc $\frac{3}{4}.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ et finalement $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{6}.\pi^2$

Bilan : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

Partie IV - Retour à l'étude de Φ.

15. Remarquons tout d'abord que si $f \in E_0 \setminus \{0\}$, alors $N_0(f) > 0$.
On a vu au 7. que $\forall f \in E_0 \setminus \{0\}$, $N_0(\Phi(f)) \leq \frac{\pi^2}{4}.N_0(f)$, donc $\frac{N_0(\Phi(f))}{N_0(f)} \leq \frac{\pi^2}{4}$.
La fonction g est impaire, croissante, avec $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}$. On en déduit que $Sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)| = \frac{\pi^2}{4}$. Or $g = \Phi(1)$, donc $N_0(\Phi(1)) = \frac{\pi^2}{4}$. Par ailleurs, $\Phi(1) = 1$, d'où $\frac{N_0(\Phi(1))}{N_0(1)} = \frac{\pi^2}{4}$.

Bilan : $\boxed{\sup_{f\in E_0\setminus\{0\}}\frac{N_0[\Phi(f)]}{N_0(f)} = \frac{\pi^2}{4}}$
Il s'agit en fait d'un maximum.
Dans toute la suite du problème, on considère :
— $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| < \frac{4}{\pi^2}$, on pourra poser $\gamma = \frac{\pi^2}{4}|\lambda|$.
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^n = \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{n \text{ fois}}$
Autrement dit $\Phi^0 = id_{E_0}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^{N+1} = \Phi \circ \Phi^n$.
— $f \in E_0\setminus\{0\}$, on posera $M = N_0(f)$.
— pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi_n = \lambda^n\Phi^n(f)$.

16. Φ est un endomorphisme de E_0, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\lambda.\Phi(\phi_n)) = \lambda.\Phi(\lambda^n.\Phi^n(f)) = \lambda^{n+1}.\Phi^{n+1}(f) = \phi_{n+1}$$
On sait d'après 15. que pour tout $f \in E_0$, $N_0(\Phi(f)) \leq \frac{\pi^2}{4}.N_0(f)$. On a donc
$$\begin{aligned}N_0(\phi_{n+1}) &= N_0(\lambda.\Phi(\phi_n)) \\ &= |\lambda|.N_0(\Phi(\phi_n)) \\ &\leq |\lambda|.\frac{\pi^2}{4}.N_0(\phi_n) \\ &\leq \gamma.N_0(\phi_n)\end{aligned}$$

17. Supposons que $\lambda\Phi(f) = f$. Alors $|\lambda|.N_0(\Phi(f)) = N_0(f)$.
Si $\lambda = 0$, alors $N_0(f) = 0$, c'est-à-dire que f est la fonction nulle.
Si $\lambda \neq 0$, alors $N_0(\Phi(f)) = \frac{1}{|\lambda|}N_0(f)$. Supposons f non nulle.
Alors $N_0(f) > 0$ et $\frac{N_0(\Phi(f))}{N_0(f)} = \frac{1}{|\lambda|} > \frac{\pi^2}{4}$, ce qui est faux ! Donc $f = 0$.
Finalement, on a $\lambda\Phi(f) = f$ si et seulement si f est la fonction nulle. Autrement dit, $\text{Ker}(id_{E_0} - \lambda\Phi) = \{0\}$: $\boxed{\text{l'application } id_{E_0} - \lambda\Phi \text{ est injective}}$

18. On montre par une récurrence facile que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_0(\phi_n) \leq \gamma^n.N_0(\phi_0)$, donc $0 \leq N_0(\phi_n) \leq \gamma^n.M$. Comme $0 \leq \gamma < 1$, la série de terme général γ^n converge (série géométrique). Par comparaison, la série de terme général $N_0(\phi_n)$ est convergente.

19. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\phi_n(x)| \leq N_0(\phi_n)$. Par comparaison, la série de terme général $\phi_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

On note alors $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n(x)$.

20. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|\sum_{n=0+\infty}\phi_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}|\phi_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}N_0(\phi^n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\gamma^n.M \leq \frac{1}{1-\gamma}.M$$
Donc $\boxed{\varphi \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$

21. Continuité de φ.
(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,
$$\begin{aligned}|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)| &= |\lambda\Phi(\phi_n)(x+h) - \lambda\Phi(\phi_n)(x)| \\ &= |\lambda.|\Phi(\phi_n)(x+h) - \Phi(\phi_n)(x)| \\ &\leq |\lambda|.(|h|\frac{N_0(\phi_n)}{2}.\ln(1+\frac{1}{h^2}) + \pi N_0(\phi_n)\arctan(h)) \text{ d'après. le 8.c} \\ &\leq \lambda|N_0(\varphi_n)\left[\frac{|h|}{2}\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi\arctan|h|\right]\end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} |\varphi(x+h)-\varphi(x)| &= |\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n(x+h)-\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n(x)| \\ &\leq |\varphi_0(x+h)-\phi_0(x)|+\sum_{n=0}^{+\infty}|\varphi_n(x+h)-\varphi_n(x)| \\ &\leq |f(x+h)-f(x)|+\lambda|\left(\sum_{n=0}^{+\infty}N_0\left(\varphi_n\right)\right)\left[\frac{|h|}{2}\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right)+\pi\arctan|h|\right] \end{aligned}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
$\lim_{h\to 0}|f(x+h)-f(x)| = 0$ puisque f est continue en x.
$\lim_{h\to 0}\pi.\arctan(h) = 0$.

$$|h|\ln(1+\frac{1}{h^2}) = |h|\ln(\frac{1+h^2}{h^2}) = |h|\ln(1+h^2)-2|h|\ln(|h|) \to_{h\to 0} 0$$

On en déduit par encadrement que $\lim_{h\to 0}\varphi(x+h)-\varphi(x) = 0$, donc φ est continue en x.

Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$
La fonction φ étant également bornée, il s'agit d'une fonction appartenant à E_0.

22. Application aux valeurs spectrales de Φ.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (id_{E_0}-\lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1}\varphi_k\right) &= \sum_{k=0}^{n+1}\varphi_k-\sum_{k=0}^{n+1}\lambda.\Phi(\varphi_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\varphi_k-\sum_{k=0}^{n+1}\varphi_{k+1} = \varphi_0-\varphi_{n+2} = f-\varphi_{n+2} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$N_0\left[(id_{E_0}-\lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1}\varphi_k\right)-f\right] = N_0(\varphi_{n+2}$$

Or la série de terme général $N_0(\varphi_n)$ converge, donc $\lim_{n\to+\infty}N_0(\varphi_{n+2} = 0$.
On en déduit bien que

$$\lim_{n\to+\infty}N_0\left[(id_{E_0}-\lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1}\varphi_k\right)-f\right] = 0$$

(b) Tout d'abord,

$$(id_{E_0}-\lambda\Phi)(\varphi)-f = (id_{E_0}-\lambda\Phi)(\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi)-f = (id_{E_0}-\lambda\Phi)(\sum_{k=0}^{n+1}\varphi_k)-f+(id_{E_0}-\lambda\Phi)(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k)$$

et donc en passant à la norme N_0 :

$$N_0(id_{E_0}-\lambda\Phi)(\varphi)-f) \leq N_0(id_{E_0}-\lambda\Phi)(\sum_{k=0}^{n+1})\varphi_k)-f)+N_0((id_{E_0}-\lambda\Phi)(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k))$$

Puis

$$\begin{aligned} N_0((id_{E_0}-\lambda\Phi)(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k)) &= N_0(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k-\lambda\Phi(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k)) \\ &\leq N_0(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k)+|\lambda|.N_0(\Phi(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k)) \\ &\leq N_0(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k)+|\lambda|.\frac{\pi^2}{4}.N_0(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k) \quad \text{d'après 15.} \\ &\leq (1+|\lambda|.\frac{\pi^2}{4}).N_0(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k) \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k(x)| \leq \sum_{k=n+2}^{+\infty}|\varphi_k(x)| \leq \sum_{k=n+2}^{+\infty}N_0(\varphi_k)$$

et on en déduit que $N_0(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k) \leq \sum_{k=n+2}^{+\infty}N_0(\varphi_k)$. Comme la série de terme général $N_0(\varphi_k)$, son reste tend vers 0 donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+2}^{+\infty}N_0(\varphi_k) = 0$ d'où par encadrement $\lim_{n\to+\infty}N_0(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k) = 0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty}N_0((id_{E_0}-\lambda\Phi)(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k)) = 0$$

On a vu à la question précédente que

$$\lim_{n\to+\infty}N_0((id_{E_0}-\lambda\Phi)(\sum_{k=0}^{n+1}\varphi_k)-f) = 0$$

Donc finalement par encadrement, on obtient $N_0(id_{E_0}-\lambda\Phi)(\varphi)-f) \leq 0$, donc $N_0(id_{E_0}-\lambda\Phi)(\varphi)-f) = 0$, ce qui signifie que l'on a l'égalité de fonctions $(id_{E_0}-\lambda\Phi)(\varphi) = f$.

Bilan : $\boxed{(id_{E_0}-\lambda\Phi)(\varphi) = f}$
On en déduit que tout $f \in E_0$ admet un antécédent (à savoir φ) par la fonction $id_{E_0}-\lambda\Phi$. Par conséquent cette fonction est surjective. Nous avons déjà vu qu'elle est bijective.
Bilan : $\boxed{\text{si } |\lambda| < \frac{4}{\pi^2}, \text{ l'application } id_{E_0}-\lambda\Phi \text{ est bijective}}$

(c) Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$ est tel que $\Phi-\mu id_{E_0}$ ne soit pas bijective. Supposons $\mu \neq 0$, alors $id_{E_0}-\frac{1}{\mu}\Phi$ n'est pas bijective. D'après le résultat précédent, on a nécessairement $\frac{1}{|\mu|} \geq \frac{4}{\pi^2}$, donc $|\mu| \leq \frac{\pi^2}{4}$.

Bilan : $\boxed{Sp(\Phi) \subset [-\frac{\pi^2}{4}, \frac{\pi^2}{4}]}$