Chapitre 7 - Variables aléatoires à densité

I. Fonction de répartition

I.1) Rappels

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La **fonction de répartition de la variable aléatoire** X, la fonction notée F_X définie par

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F_X(x) = P([X \leq x]) \end{array}$$

Proposition I.1
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire sur cet espace probabilisé. On note F_X sa fonction de répartition.

1. ***monotonie*** : F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. ***limites :*** $\lim_{t\to-\infty} (F_X(t)) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} (F_X(t)) = 1$
3. ***continuité à droite en tout point :*** F_X est continue à droite en tout réel.

Proposition I.2
Une autre propriété
Pour tout réel a, $P([X = a]) = F_X(a) - \lim_{t\to a^-} F_X(t)$.

Proposition I.3
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si la fonction F vérifie les trois propriétés suivantes :

1. F est fonction continue à droite en tout réel.
2. F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim_{t\to-\infty} (F_X(t)) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} (F_X(t)) = 1$

alors F est **la fonction de répartition d'une variable aléatoire** X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

I.2) Exemple d'un nouveau type de variable aléatoire

On note

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \in [1, +\infty[& \mapsto & F(x) = \dfrac{2x-2}{2x-1} \\ x < 1 & \mapsto & F(x) = 0 \end{array}$$

1. Montrer que F est une fonction de répartition et tracer son tableau de variation.
2. Dessiner la courbe de la fonction F.
3. On note X une variable aléatoire de fonction de répartition F.
Calculer $P(X > 2)$, $P(2 < X \leq 3)$, $P(X = 2)$, $P_{[X>2]}(X < 3)$.

II. Variable aléatoire à densité

II.1) Définition

Définition II.1
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire sur cet espace probabilisé. On dit que X est **une variable aléatoire à densité** lorsque sa fonction de répartition F_X vérifie les deux propriétés suivantes :

1. F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$
2. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus E$ où E est un ensemble fini de nombres réels.

L'ensemble E est appelé **ensemble des points critiques** de X (ou de F_X).

II.2) Densité de X

Définition II.2
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, positive et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ est appelée une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire **à densité** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit F_X sa fonction de répartition et $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ l'ensemble de ses points critiques.

On construit la fonction suivante $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x \in \mathbb{R} \setminus E & \mapsto & F'_X(x) \end{array}$
$$\left.\begin{array}{ccc} a_1 & \mapsto & b_1 \geq 0 \\ a_2 & \mapsto & b_2 \geq 0 \\ & \vdots & \\ a_r & \mapsto & b_r \geq 0 \end{array}\right\} \text{arbitraire}$$

Proposition II.1
La fonction f est **une densité de probabilité**. On dit que c'est UNE densité de X et qu'elle est associée à F_X.

Exercice 1
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
2. Tracer le graphe de F.
3. Déterminer une densité de X. Tracer la courbe de cette densité.

II.3) D'une densité vers la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire **à densité** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit f **une** densité de X.
Alors, **la** fonction de répartition de X est obtenue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$

II.4) Points critiques d'une variable aléatoire à densité

Soient X une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, f une densité de X et F_X sa fonction de répartition.

- L'ensemble des points critiques de X est l'ensemble des points de **discontinuité** de la fonction f.
- L'ensemble des points critiques de X est l'ensemble des points où la fonction F n'est pas dérivable.
- F_X est une primitive de la fonction f sur chacun des intervalles de $\mathbb{R} \setminus E$.
- Si une fonction G définie sur $\mathbb{R}$ vérifie les trois propriétés suivantes :
  1. G est une primitive de f sur chacun des intervalles de $\mathbb{R} \setminus E$
  2. La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$
  3. $\lim_{x\to-\infty} (G(x)) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} (G(x)) = 1$

  Alors $\boxed{G = F_X}$

II.5) Schéma global

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ F_X \arrow[rr, shift left, "derive"] & & f_X \arrow[ll, shift left, "primitive"] \end{tikzcd}$$

$P(X \leq x) = F_X(x)$ $\qquad$ $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

II.6) Univers image

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On rappelle que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et que $X(\Omega) = \{X(\omega) \text{ tels que } \omega \in \Omega\}$.
On admettra que

$$X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) > 0\}$$

Ainsi l'ensemble $X(\Omega)$ pour une variable aléatoire est défini à quelques points près, comme le support d'une densité de X.

II.7) Formulaire pour une variable à densité

Soit X une variable aléatoire **<u>à densité</u>** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note f une densité de X.

Soient a et b des réels tels que $a < b$.

$$P(X \leq a) = \ldots$$

$$P(X = a) = \ldots$$

$$P(X > a) = \ldots$$

$$P(a < X \leq b) = \ldots$$

III. Loi d'une variable à densité

III.1) Déterminer une loi

III.1.1 Cas général

Déterminer la loi d'une variable aléatoire consiste à déterminer sa fonction de répartition.

Définition III.1
Soient X et Y des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On dit que les variables aléatoires X et Y ont la même loi lorsqu'elles ont la même fonction de répartition, c'est à dire lorsque $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(X \leq t) = \ldots$.

III.1.2 Cas d'une variable à densité

Définition III.2
Soient X et Y des variables aléatoires réelles définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

• Si X est une variable aléatoire **à densité** alors toute fonction f_X qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points (éventuellement aucun) est une densité de X.

• Si X est une variable aléatoire **à densité** alors la donnée d'une densité de X caractérise la loi de X.

• Si X et Y sont des variables à densité et si leurs densités coïncident sauf en un nombre fini de points alors les variables X et Y ont la même loi.

III.1.3 loi de $g(X)$ et $g(Y)$

Proposition III.1
Soient X et Y des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Si les variables aléatoires X et Y admettent la même loi et si g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors les variables $g(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires réelles admettant la même loi.

III.2) Transformation affine d'une variable à densité

III.2.1 Cas général : loi de $aX + b$

Théorème III.1
(HP)
Soient a et b deux réels où $a \neq 0$.
Soit X une variable aléatoire à densité de densité f_X. On note $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = at + b$
Alors $Y = aX + b$ est une variable aléatoire à densité de densité f_{aX+b} définie par :

$$\begin{aligned} f_{aX+b} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto f_{aX+b}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{si } y \in g(X(\Omega)) \\ 0 & \text{si } y \notin g(X(\Omega)) \end{cases} \end{aligned}$$

A noter : $Y(\Omega) = g\left(X(\Omega)\right)$.

Attention **la formule est HP**, il faut donc savoir la retrouver !!!

Exemple
Reprenons l'exercice 2 page 2. On considère la variable aléatoire $Y = 2X - 3$. Justifier que Y est une variable a densité et déterminer une densité de Y.

III.3) Comment déterminer la loi de X^2 ?

Si X est une variable aléatoire discrète :
on détermine d'abord $X^2(\Omega)$
puis pour tout entier x de $X^2(\Omega)$, on calcule $P(X^2 = x)$ en remarquant que si $x > 0$ alors $(X^2 = x) = (X = -\sqrt{x}) \cup (X = \sqrt{x})$.

Exemple :

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([[-5, 5]])$.

Déterminer la loi de X^2.

Si X est une variable aléatoire à densité :
on détermine d'abord $X^2(\Omega)$
puis pour tout réel x de $X^2(\Omega)$,
on calcule $P(X^2 \leqslant x)$ en remarquant que si $x > 0$,

$(X^2 \leqslant x) = (-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x})$.

Exemple :

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Déterminer la loi de X^2.

III.4) Comment déterminer la loi de $|X|$?

Si X est une variable aléatoire à densité de densité f,
on détermine d'abord $|X|(\Omega)$.
Puis pour tout réel x de $|X|(\Omega)$, on calcule $P(|X| \leq x)$ en remarquant que
$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $P(|X| \leq x) = P(-x \leqslant X \leqslant x)$.

III.5) Comment déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$?

Si X est une variable aléatoire à densité de densité f,

alors on détermine d'abord $\lfloor X \rfloor(\Omega)$. On remarque que $\lfloor X \rfloor(\Omega) \subset \dots$

Puis pour tout entier k de $\lfloor X \rfloor(\Omega)$, on calcule $P(\lfloor X \rfloor = k)$ en remarquant que
$P(\lfloor X \rfloor = k) = P(k \leqslant X < k + 1)$.
Attention !!! $\boxed{\lfloor X \rfloor \text{ est une variable aléatoire discrète.}}$

Exercice 2
Un classique à savoir refaire
On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$. On note $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. Reconnaître la loi de Y.

IV. Espérance d'une VAR à densité

IV.1) Définition

Définition IV.1
Soient X une variable aléatoire **à densité** sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et f_X une densité de X.

On dit que X **admet une espérance** lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ est absolument convergente.
Dans ce cas, on appelle ce réel **espérance de** X et on note $E(X)$ le réel défini par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$$

Exemple
Reprenons l'exercice 2 page 2. Justifier que X admet une espérance et calculer cette espérance.

IV.2) Propriétés

Toutes les propriétés de l'espérance vues dans le chapitre II restent valable pour les variables aléatoires à densité :

- la linéarité de l'espérance
- La croissance et la positivité de l'espérance
- Le critère d'existence par domination

IV.3) Formule de transfert pour une variable à densité

Théorème IV.1
Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit a désignant un réel ou $-\infty$. Soit b désignant un réel ou $+\infty$ tel que $a < b$.
On suppose que X admet une densité f_X nulle en dehors de l'intervalle $]a, b[$ (c'est à dire $X(\Omega) \subset]a, b[$)
On suppose que φ est une fonction **continue** sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

1. La variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance **si et seulement si** l'intégrale $\int_a^b \varphi(t) f(t) dt$ converge absolument.
2. Si la variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance alors

$$E(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t).\ f(t)\ dt$$

Exercice 3
On suppose X suit une loi uniforme sur $[0, 1[$.
On note $Y = \cos(\pi X)$. Montrer que Y admet une espérance et la déterminer.

Exercice 4
X suit une loi normale centrée réduite. On note $Y = e^{X+1}$.
Montrer que Y admet une espérance et déterminer l'espérance de Y.

V. Moments d'une VAR

V.1) Moments d'ordre r (HP)

Définition V.1
Soit r un entier non nul.
Soit X une variable aléatoire réelle (discrète ou à densité) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$
On dit que la variable aléatoire réelle X **admet un moment d'ordre** r quand X^r admet une espérance.

Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre r, alors le réel

$$m_r(X) = E(X^r)$$

est appelé **le moment d'ordre** r **de** X.

Proposition V.1
Si X est une variable aléatoire à densité et si X admet un moment d'ordre r, alors

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, dt$$

VI. Variance d'une variable aléatoire réelle

Définition VI.1
Soit X une variable aléatoire réelle (discrète ou à densité) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que X admet un moment d'ordre 2.

On appelle **variance de** X et on note $V(X)$ le réel défini par :

$$V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$$

Théorème VI.1
Formule de Koenig-Huygens.
Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. Alors X admet une variance et

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2\,.$$

Théorème VI.2
Propriétés de la variance
Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2,
Soit Y une variable aléatoire réelle.

- $V(X) \geqslant 0$
- pour tout couple de réels (a, b), $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2.\ V(X)$$

- $V(X) = 0$ si et seulement si $X = E(X)$ presque sûrement.
- **Si** X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes** admettant une variance **alors** $X + Y$ admet une variance et

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

  Si de plus a et b sont deux réels alors

$$V(aX + bY) = a^2.V(X) + b^2.V(Y)$$

Définition VI.2
Ecart-type
Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2.

On appelle **écart-type de la variable aléatoire réelle** X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Interprétation
La variance et l'écart type d'une variable X mesurent la dispersion d'une variable aléatoire autour de sa valeur moyenne.

Définition VI.3
Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On dit que la variable X est **centrée réduite** lorsque la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 et que :

$$E(X) = 0 \text{ et } \sigma(X) = 1$$

Proposition VI.1
Variable centrée réduite associée
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2. On suppose que $\boxed{V(X) \neq 0}$
La variable aléatoire réelle

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

est une variable aléatoire réelle centrée réduite.
On dit que la variable X^* est **la variable aléatoire réelle centrée réduite associée à** X.

VII. Loi uniforme

VII.1) Un exercice

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note f la fonction définie par

$$f: \begin{array}{ccll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ t < a & \mapsto & f(t) & = 0 \\ a \leq t \leq b & \mapsto & f(t) & = \dfrac{1}{b-a} \\ t > b & \mapsto & f(t) & = 0 \end{array}$$

1. Tracer la courbe de f.
2. Justifier que f est une densité de probabilité. Soit X une variable à densité de densité f.
3. Déterminer la fonction de répartition de X, puis tracer l'allure de sa courbe représentative.
4. Justifier que X admet une espérance et calculer cette espérance
5. Justifier que X admet une variance et calculer cette variance.

VII.2) Définition

Définition VII.1
Avec la fonction de répartition
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On dit que X **suit une loi uniforme sur** $[a, b]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ lorsque sa fonction de répartition F est définie par:

$$F: \begin{array}{ccll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x < a & \mapsto & F(x) & = 0 \\ a \leq x \leq b & \mapsto & F(x) & = \dfrac{x-a}{b-a} \\ x > b & \mapsto & F(x) & = 1 \end{array}$$

Définition VII.2
Avec une densité
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On dit que X suit **une loi uniforme sur** $[a, b]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ lorsque X est une variable aléatoire à densité et qu'une de ses densités est définie de la manière suivante:

$$f: \begin{array}{ccll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ t < a & \mapsto & f(t) & = 0 \\ a \leq t \leq b & \mapsto & f(t) & = \dfrac{1}{b-a} \\ t > b & \mapsto & f(t) & = 0 \end{array}$$

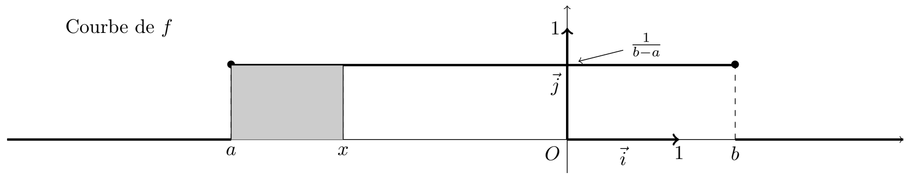
points critiques, univers image
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ alors $E = \{a, b\}$ et $X(\Omega) = [a, b]$
On note aussi : $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\,]a,b[}$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\,]a,b]}$

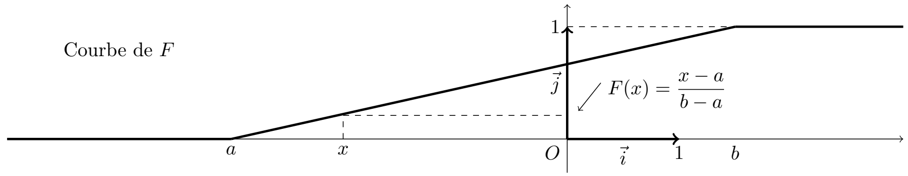
Théorème VII.1
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ alors X admet une espérance et une variance,

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

VII.2.1 Courbes

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit loi uniforme sur $[a, b]$.
Traçons les courbes de f et de F l'une en dessous de l'autre :





VII.3) Stabilité par transformation affine pour les lois uniformes

Proposition VII.1
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]} \iff a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}}$$

Proposition VII.2
Soient α et β deux réels tels que $\alpha \neq 0$. On note $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \alpha t + \beta$.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme, alors la variable aléatoire $Y = \alpha X + \beta$ suit une loi uniforme de support $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$.

Remarque
Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soient α et β deux réels.
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé, $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$. On note $Y = \alpha X + \beta$.
Pour obtenir la loi de Y, on commencera par déterminer l'ensemble $Y(\Omega)$ puis on appliquera le théorème de stabilité par transformation affine pour les lois uniformes.

Exercice 5
Soit X une var sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Donner les densités, fonctions de répartition, espérance dans chacun des cas suivants.
   i) $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{([0,1])}$ *ii)* $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{([-2,5])}$
2. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{([-2,5])}$. Déterminer la loi de $Y = -2X + 3$.

VII.4) Loi uniforme (continue) en Python

VIII. Loi exponentielle

VIII.1) Un exercice

Soit α un nombre réel strictement positif. On note f la fonction définie par

$$f: \begin{array}{ccll} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} & \\ t<0 & \mapsto & f(t) & =0 \\ t \geq 0 & \mapsto & f(t) & =\alpha . e^{-\alpha t} \end{array}$$

1. Justifier que f est une densité de probabilité et tracer l'allure de sa courbe dans un repère orthonormé.
   On considère une variable aléatoire X à densité de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X et tracer l'allure de la courbe représentative de F.
3. Justifier que X admet une espérance et calculer cette espérance.
4. Justifier que X admet une variance et calculer cette variance.

VIII.2) Définition

Définition VIII.1
Avec la fonction de répartition

Soit α un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On dit que X **suit une loi exponentielle de paramère** α et on note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\alpha)$ lorsque la fonction de répartition de X est définie par:

$$F: \begin{array}{ccll} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} & \\ x<0 & \mapsto & F(x) & =0 \\ x \geq 0 & \mapsto & F(x) & =1-e^{-\alpha x} \end{array}$$

Définition VIII.2
Par une densité

Soit α un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On dit que X suit **une loi exponentielle de paramètre** α et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ lorsque X est une variable aléatoire à densité et qu'une de ses densités est :

$$f: \begin{array}{ccll} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} & \\ t<0 & \mapsto & f(t) & =0 \\ t \geq 0 & \mapsto & f(t) & =\alpha e^{-\alpha t} \end{array}$$

Points critiques, univers image :

Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\alpha)$ alors $E=\{0\}$ et $X(\Omega)=\mathbb{R}^{+}$.

Théorème VIII.1
Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\alpha)$ alors X admet une espérance et une variance et

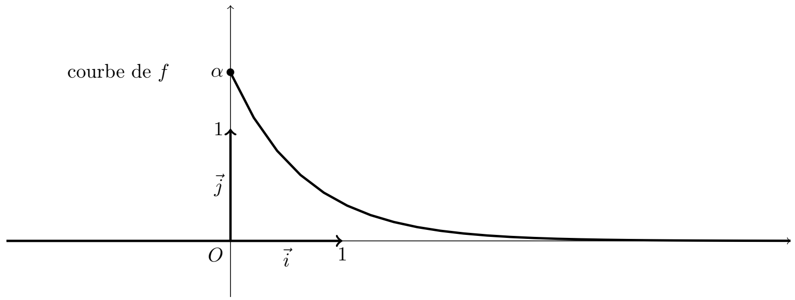
$$E(X)=\frac{1}{\alpha} \text{ et } V(X)=\frac{1}{\alpha^{2}}$$

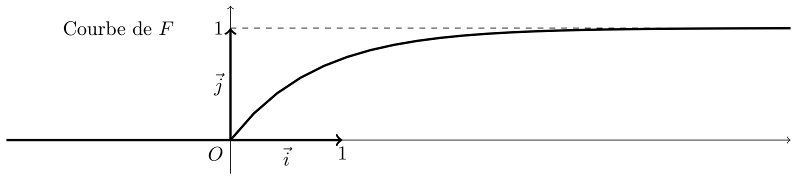
VIII.3) Loi exponentielle en Python

Attention !

VIII.4) Courbes

Soient α un réel strictement positif. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit loi exponentielle de paramètre α.
Traçons les courbes de F_X et de f l'une en dessous de l'autre.





VIII.5) Stabilité par transformation linéaire pour les lois exponentielles

Proposition VIII.1
Soient α un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

$$X \hookrightarrow \mathscr{E}(1) \iff \frac{1}{\alpha} X \hookrightarrow \mathscr{E}(\alpha)$$

$$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\alpha) \iff \alpha X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$$

Exercice 6
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On note $Y=\ln(X)$.
On admet que Y est une variable aléatoire. Justifier que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y.

VIII.6) Modèle

Durée de vie : On note X la durée de vie d'un appareil qui est mis en route à l'instant $t = 0$.
Comment traduire avec X les événements suivants

A : "il tombe en panne à l'instant t" ?
B : "il est en panne à l'instant t" ?
C : "il fonctionne à l'instant t" ?

Modèle : On dit que la durée de vie est **sans mémoire** si le fait d'avoir déjà fonctionné un certain temps n'influe pas sur le temps de (bon) fonctionnement ultérieur.

Processus sans mémoire :
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.
On dit que la variable X est **sans mémoire** lorsque

$$\forall t \geq 0 \text{ et } \forall h \geq 0 : \quad \mathrm{P}_{[X>h]}(X > t + h) = \mathrm{P}(X > t)$$

Caractérisation de la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à densité et admettant une densité à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$X \text{ suit une loi exponentielle} \iff X \text{ est sans mémoire et } \mathrm{P}(X \geq 0) = 1$$

Autrement dit : **Les variables aléatoires suivant une loi exponentielle sont les seules variables aléatoires positives sans mémoire.**

Preuve

1. Soient $\alpha > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre α.
   (a) Justifier que pour tout réel x positif ou nul, le nombre $P(X > x)$ est non nul.
   (b) Montrer que pour tous réels positifs t et h,
   $$P_{[X>h]}(X > t + h) = P(X > t)$$
2. soit X une variable aléatoire admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant
   $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(t) > 0$.
   On suppose de plus, que $\mathrm{P}(X \geq 0) = 1$ et que, pour tous réels positifs t et h,
   $P_{[X>h]}(X > t + h) = P(X > t)$
   On note $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = P(X > x)$.
   (a) Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer sa dérivée en fonction de f
   (b) Justifier que $g(x)$ est non nul pour tout réel x positif.
   (c) Justifier que $\forall h \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g(x + h) = g(x)g(h)$.
   (d) On note $\alpha = f(0)$. Montrer que pour tout x réel positif ou nul, on a la relation $g'(x)+\alpha g(x) = 0$.
   (e) Calculer la dérivée de $x \mapsto g(x)e^{\alpha x}$ sur $\mathbb{R}_+$
   (f) Déduire que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

IX. Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

IX.1) Intégrale de Gauss (rappel)

Théorème IX.1
Intégrale de Gauss
L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

IX.2) Une nouvelle fonction : la fonction Φ

On note : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer les coordonnées des points d'inflexions à la courbe de f.
3. Tracer la courbe de f et placer les tangentes à la courbe aux points d'inflexion.
4. Justifier que f est une densité de probabilité.
5. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. Tracer sa courbe en dessous de la courbe de f. Préciser la valeur de $\Phi(0)$.
6. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$.

Théorème IX.2
La fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite Φ vérifie :

- la fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, 1[$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

IX.3) Loi normale centrée réduite

Définition IX.1
Par la fonction de répartition
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On dit que X **suit la loi normale centrée réduite et on note** $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0, 1)$ lorsque sa fonction de répartition Φ est définie par:

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{array}$$

Remarque
Cette fonction n'est pas calculable !

Définition IX.2
Par une densité
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On dit que X **suit la loi normale centrée réduite et on note** $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ lorsque X est une variable aléatoire à densité et qu'une de ses densités est définie de la manière suivante:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \end{array}$$

<u>**Points critiques, univers image**</u>
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $E = \emptyset$ et $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Théorème IX.3
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors X admet une espérance et $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$

Simulation en Python

IX.4) Loi normale (ou de Laplace-Gauss) de paramètres m et σ^2

Théorème IX.4
Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$
On admettra que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(t-m)^2}{2.\sigma^2}} \, dt = 1$$

Proposition IX.1
Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$
On note :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

La fonction f est une densité de probabilité.

Définition IX.3
Par la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$
On dit que X suit **une loi normale de paramètres** (m, σ^2) et on note $X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$ lorsque sa fonction de répartition F est définie par:

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & F(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \, dt \end{array}$$

Définition IX.4
Par une densité
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$
On dit que X suit **une loi normale de paramètres** (m, σ^2) **et on note** $X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$ lorsque X est une variable aléatoire à densité et qu'une de ses densités est définie de la manière suivante:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \end{array}$$

A retenir
Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors la courbe de la densité de X (ci dessus) admet un maximum au point d'abscisse m et deux points d'inflexions d'abscisses $m - \sigma$ et $m + \sigma$.

Points critiques, univers image
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $E = \emptyset$ et $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Théorème IX.5
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X admet un moment d'ordre 2 et

$$E(X) = m \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2$$

IX.5) Stabilité des lois normales par transformation affine

Théorème IX.6
Théorème de centrage-réduction

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors la variable définie par $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

$$X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2) \Longleftrightarrow \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$$

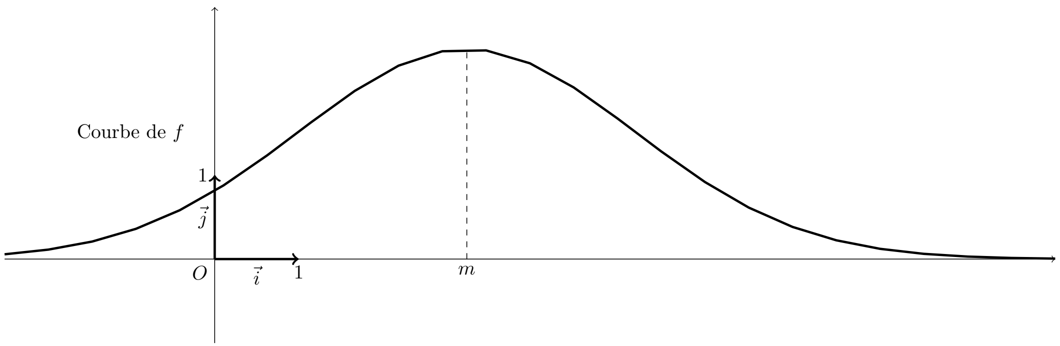
Théorème IX.7
Stabilité par transformation affine
Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$.
Si une variable aléatoire X suit une loi normale alors n'importe quelle transformée affine $aX + b$ de cette variable aléatoire suit encore une loi normale.

Pour obtenir les paramètres de la loi de $aX + b$, on calculera l'espérance et la variance de la variable $aX + b$, puis on évoquera le théorème de stabilité par transformation affine pour une loi normale.

Exercice 7
Soit X une variable aléatoire suivante une loi normale de paramètres $(1, 3)$.
Préciser une densité de X puis déterminer une densité de la variable $5 - X$, puis de la variable $2X - 4$.

IX.6) Courbes

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$. On suppose que X est une variable aléatoire à densité qui suit **une loi normale de paramètres** (m, σ^2).



IX.7) Simulation en Python

IX.8) Des exercices

Exercice 8
Calculs d'intégrales
Justifier que l'intégrale suivante existe et la calculer.

$$I = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$$

Exercice 9
On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
Justifier que X^2 est une variable à densité et déterminer une densité de X^2.

IX.9) Table de la loi normale centrée réduite

On donne ici les valeurs approchées de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
Les décimales se lisent sur les lignes, et on ajoute les centièmes rangés en colonnes.

Par exemple, la valeur de $\Phi(1, 93)$ est donnée à l'intersection de la ligne $1, 9$ et de la colonne $0, 03$, et l'on peut lire $\Phi(1, 93) = 0, 9732$, à 10^{-4} près.

Au delà de la valeur $x = 3, 9$, la valeur de $\Phi(x)$ est presque égale à 1 (à 10^{-4} près), elle n'est donc plus tabulée.

Enfin, pour les valeurs négatives de x, on utilise la relation $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	8849	.8869	.8888	.8906	.8925	.8943	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9986	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

X. Indépendance de VAR

X.1) Rappels : Définitions, Coalition

X.1.1 Cas de deux variables

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** lorsque :
pour tout couple de réels (x, y) les événements $(X \leq x)$ et $(Y \leq y)$ sont indépendants.

X.1.2 Cas de n variables mutuellement indépendantes

Définition X.1
Soient X_1, X_2,$\cdots$, X_n n variables aléatoires réelles définies le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On dit que les variables aléatoires X_1, X_2, $\cdots$, X_n sont **mutuellement indépendantes** lorsque pour tout n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ de réels,
les événements $(X_1 \leq x_1)$, $(X_2 \leq x_2)$, $\cdots$, $(X_n \leq x_n)$ sont mutuellement indépendants.

X.1.3 Lemme de coalition

Les deux versions du Lemme de coalition sont valables pour les variables à densité.

X.2) Loi de $Min(X, Y)$ et de $Max(X, Y)$

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega), \mathscr{A}, P)$ suivant une même loi uniforme sur $[0, 1]$.
   On note $Z = Max(X, Y)$.
   Justifier que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z.

2. Soient a et b des réels strictement positifs. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes les deux des lois exponentielles de paramètres respectifs a et b.
   On note $T = Min(X, Y)$.
   Justifier que T est une variable à densité et déterminer une densité de T.

X.3) Loi de la somme : produit de convolution dans le cas des variables à densités

Théorème X.1
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densités respectives f_X et f_Y.
On note

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt$$

Si la fonction h est définie, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points alors h est une densité et $X + Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt$$

La fonction h s'appelle le **produit de convolution** de f_X et f_Y.

Remarque
Le changement de variable $u = x - t$ permet d'établir que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x - t) f_Y(t) dt$$

Théorème X.2
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité, **indépendantes**, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densités respectives f_X et f_Y.
On note $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt$$

Si f_X ou f_Y est bornée sur $\mathbb{R}$ alors la fonction h est une densité et $X + Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x - t) f_Y(t) dt$$

X.3.1 En pratique

Pour obtenir une densité d'une variable $X + Y$ il faudra s'assurer :

- que les variables X et Y sont bien des variables à densité et qu'elles sont indépendantes
- qu'il ne s'agit pas de lois usuelles qui vérifient des thm de stabilité par la somme
- déterminer $(X + Y)(\Omega)$: ainsi $\forall x \notin (X + Y)(\Omega)$, $h(x) = 0$
- vérifier que l'une des densités est bornées sur $\mathbb{R}$ (ce n'est pas toujours le cas).

Exercice 10
Soient λ et μ des réels strictement positifs tels que $\lambda \neq \mu$.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega), \mathscr{A}, P)$ suivant toutes les deux des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ.
On note $Z = X + Y$.
Justifier que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z

X.4) Espérance du produit de deux variables réelles indépendantes

Théorème X.3
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Si X et Y sont des variables aléatoires à densité **indépendantes**, admettant une espérance **alors** XY est une variable aléatoire admettant une espérance et

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

XI. La loi petit gamma

XI.1) Rappel : la fonction Gamma

On rappelle que l'on a étudié la fonction Γ définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

On a montré que : $\forall x \in]0,+\infty[, \Gamma(x) > 0$

XI.2) Densité d'une loi petit gamma

Définition XI.1
Soit ν un réel **strictement positif**.
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On dit que X suit **une loi petit gamma de paramètre** ν et on note $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$ lorsque X est une variable aléatoire à densité et qu'une de ses densités est :

$$\begin{array}{rcll} f : \quad \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ t \leqslant 0 & \mapsto & f(t) & = 0 \\ t > 0 & \mapsto & f(t) & = \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\, t^{\nu-1}e^{-t} \end{array}$$

Remarque
$\boxed{X \hookrightarrow \gamma(1) \Longleftrightarrow X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)}$

Remarque
Il faudra savoir tracer la courbe de cette densité suivant les valeurs de ν suivant les trois cas $\nu \in]0,1[$, $\nu = 1$ et $\nu > 1$.

Points critiques, univers image

Si $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$ alors $E = \{0\}$ et $X(\Omega) =]0,+\infty[$

Théorème XI.1
Si $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$ alors X admet un moment d'ordre 2,

$$E(X) = \nu \quad \text{et} \quad V(X) = \nu$$

Exercice 11
Soit X une variable aléatoire suivant la loi petit gamma de paramètre 2. On note $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y.

XI.3) Courbes en Python

Tracer les courbes en Python d'une densité d'une loi γ suivant les valeurs du paramètre.

XII. Théorèmes de stabilité pour la somme

XII.1) Théorème de stabilité pour les lois petit gamma

XII.1.1 Cas de deux variables

Théorème XII.1
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soient $\nu_1 \in]0,+\infty[$ et $\nu_2 \in]0,+\infty[$

Si $X_1 \hookrightarrow \gamma(\nu_1)$, si $X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_2)$ et si X_1 et X_2 sont des variables **indépendantes**
alors $\boxed{X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)}$

XII.1.2 Cas de m variables

Théorème XII.2
Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m) \in (]0,+\infty[)^m$.
On considère $X_1, X_2, \ldots, X_m$ une famille de m variables aléatoires réelles telles que :
$\forall k \in [[1,m]]$, $X_k \hookrightarrow \gamma(\nu_k)$.
Si les m variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont **mutuellement indépendantes**

alors $\boxed{X_1 + X_2 + \ldots + X_m \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n)}$

XII.1.3 Conséquences sur les lois exponentielles de paramètre 1

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_m$ une famille de m variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Si $\forall k \in [[1,m]]$, $X_k \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$ et si les m variables aléatoires X_1, X_2, $\ldots$, X_m sont mutuellement indépendantes
alors $X_1 + X_2 + \ldots + X_m \hookrightarrow \cdots$

XII.2) Théorème de stabilité pour la somme pour les lois normales

XII.2.1 Cas de deux variables

Théorème XII.3
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soient $m_1 \in \mathbb{R}$ et $m_2 \in \mathbb{R}$. Soient $\sigma_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sigma_2 \in \mathbb{R}_+^*$

Si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{N}(m_1, \sigma_1^2)$, si $X_2 \hookrightarrow \mathscr{N}(m_2, \sigma_2^2)$ et si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

XII.2.2 Cas de r variables

Théorème XII.4
Soit r un entier naturel supérieur ou égal à 2, soit $(m_1, m_2, \dots, m_r) \in \mathbb{R}^r$ et $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \in (\mathbb{R}_+^*)^r$.
On considère $X_1, X_2, \dots, X_r$ une famille de r variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Si $\forall k \in [[1, r]]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ et si les r variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_r$ sont **mutuellement indépendantes**, alors

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_r \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + \cdots + m_r, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2)$$

XIII. Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

XIII.1) Inégalité de Markov

Théorème XIII.1
Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire si $X \geqslant 0$), et si X admet une espérance, alors

$$\forall a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration de l'inégalité de Markov:

Avec les hypothèses de l'énoncé.
Soit a un réel strictement positif. On note A l'événement $A = [X \geq a]$ On note $\mathbb{1}_A$ la variable indicatrice de l'événement A.

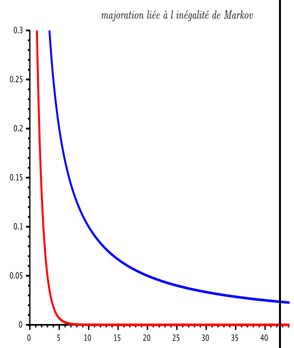
1. Rappeler la définition de la variable $\mathbb{1}_A$.
2. Calculer l'espérance de la variable $\mathbb{1}_A$.
3. Montrer que $a \times \mathbb{1}_A \leq X$. En déduire l'inégalité de Markov.

XIII.2) Une application

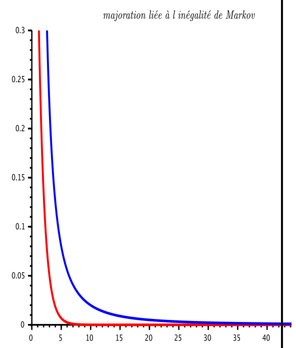
Soit X une variable aléatoire de loi $\gamma(\nu)$ où $\nu > 0$.
Soit r un entier naturel.

1. Justifier que X admet un moment d'ordre r et calculer ce moment d'ordre r.
2. Justifier que $\forall a > 0$, $P\big(|X| \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{E(|X|^r)}{a^r}$

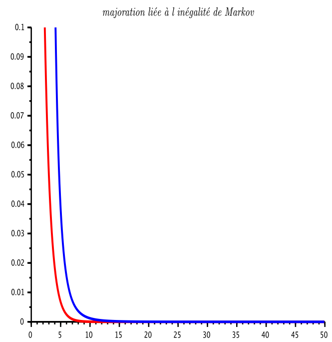
Pour $\nu = 1$ et $r = 1$



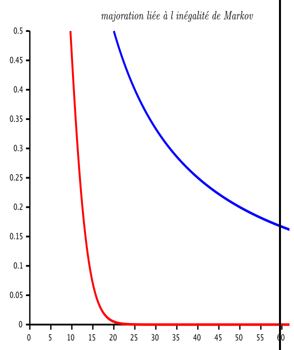
Pour $\nu = 1$ et $r = 2$



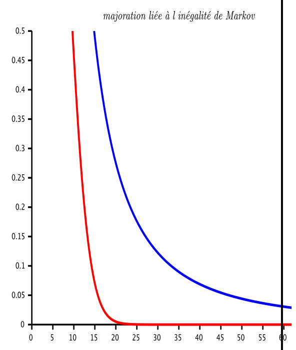
Pour $\nu = 1$ et $r = 5$



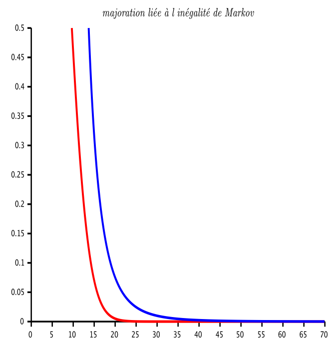
Pour $\nu = 10$ et $r = 1$



Pour $\nu = 10$ et $r = 2$



Pour $\nu = 10$ et $r = 5$



XIII.3) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème XIII.2
Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que la variable X admet un moment d'ordre 2 et on note $m = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - m| > \varepsilon) \leqslant P(|X - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

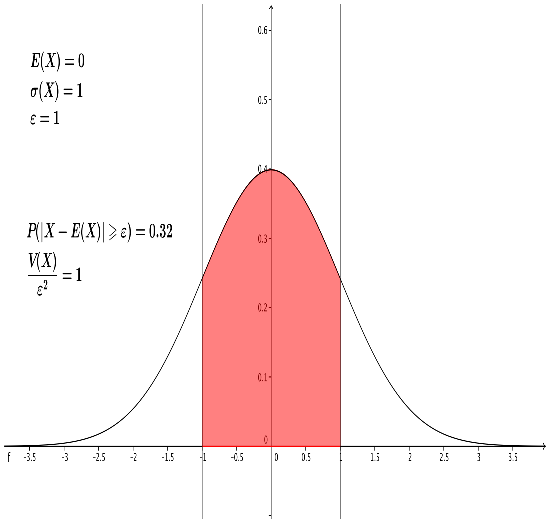
Démonstration :

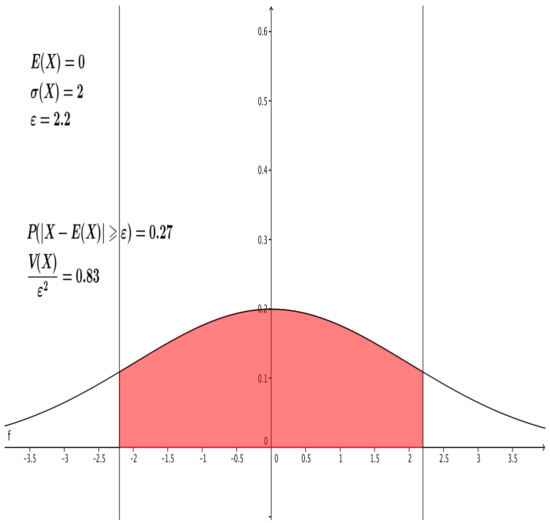
L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev s'obtient en appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ et en remplaçant a par ϵ^2.

XIII.4) Interprétation de cette inégalité et applications

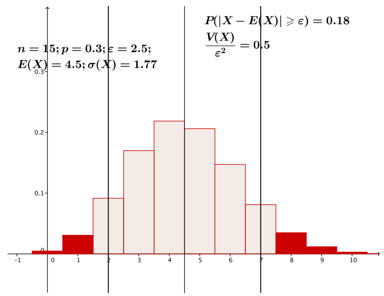
L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev ne dépend pas de la loi de X (seulement de son espérance et de sa variance), elle fournit un majorant assez grossier de $P(|X-E(X)| \geq \epsilon)$. Souvent, on reconnait qu'il faut se servir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev grâce aux valeurs absolues présentes dans la probabilité. En général, il faudra y penser lorsque l'on doit établir des inégalités pour des probabilités d'événements concernant une variable dont on connait l'espérance et la variance.

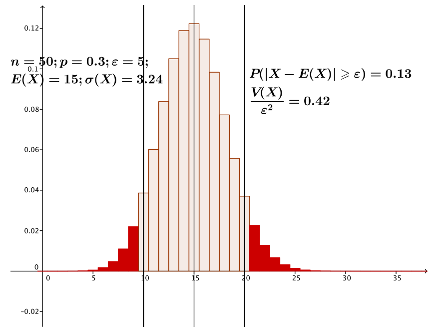
CAS 1 : Soit X une v.a.r. qui suit une loi normale centrée.





CAS 2 : Soit X une v.a.r. qui suit une loi binomiale,





Exercice 12

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Montrer que $\forall \epsilon > 0, P\left(|X-\frac{1}{\lambda}| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\lambda^2\epsilon^2}$. En déduire que $P\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}$

Exercice 13

Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$