ECG2 - Lycée Saint Just
Mathématiques Approfondies 2023/24

Programme de colle - **Semaine 8**
du 25 au 29 novembre 2024

`Informatique : programmation en langage Python`

Notamment : **simulation des variables discrètes usuelles en Python** (loi uniforme discrète, loi binômiale, géométrique, de Poisson, générateur `rd.random()`).

Chapitre 6. Variables aléatoires réelles discrètes (tout)

1. Généralités
   - Généralités.
   - Variable $Y = g(X)$.
   - Variable certaine, variable indicatrice d'un événement A.
   - SCE associé à une variable discrète.
   - Variables discrètes indépendantes. Cas de n variables mutuellement indépendantes.
   - Lemmes de coalition.
   - Fonction de répartition d'une VAR. Propriétés : fonction croissante, limites en $-\infty$ et $+\infty$, continuité à droite en tout point.
   - Cas d'une VAR discrète.
   - Déterminer la loi d'une VAR discrète.
     Formules du type $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k + 1)$ etc...
   - Loi de $X+Y$, loi de $Max(X, Y)$ (aussi noté $Sup(X, Y)$), loi de $min(X, Y)$ (aussi noté $inf(X, Y)$) : exemples.

2. Lois usuelles
   - **Loi uniforme sur** $[[1, n]]$: définition, espérance, variance.
   - Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([[a, b]])$, alors $Y = X - a + 1$ suit la loi $\mathcal{U}([[1, b - a + 1]])$. En déduire l'espérance et la variance de X (*).
   - **Loi de Bernoulli de paramètre** p, espérance, variance.
   - **Loi binômiale de paramètres** n**,** p : définition, espérance, variance.
     MODELE : X est égale au nombre de succès lorsque l'on répète n fois une épreuve de Bernoulli $\mathcal{E}$, de probabilité de succès p, de manière identique et indépendante.
   - **Loi géométrique de paramètre** p : définition, espérance, variance.
     MODELE : X est égale au temps d'attente du premier succés lorsque l'on répète n fois une épreuve de Bernoulli $\mathcal{E}$, de probabilité de succès p, de manière identique et indépendante.
     Valeur de $P(X > k)$: à retrouver très rapidement à l'aide du modèle.

   - **Loi de Poisson de paramètre** λ : définition, espérance, variance. Pas de modèle.

3. Somme de deux variables indépendantes :
   - Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ et X_1 et X_2 sont indépendantes
     alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. A comprendre avec le modèle.
   - Somme de m variables indépendantes suivant des lois binômiales de même paramètre p.
   - Somme de variables de Bernoulli.
   - Explosion d'une variable binômiale : si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $X = X_1 + \cdots + X_n$ où les X_k sont des variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Lien avec le modèle.
   - Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ et X_1 et X_2 sont indépendantes
     alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ (*) **PREUVE A MAITRISER**
   - Somme de n variables indépendantes suivant une loi de Poisson (* **preuve par récurrence+ lemme de coalition à maîtriser**).

4. Espérance
   - Définition pour les variables discrètes. Cas fini ou infini.
   - Linéarité de l'espérance :
     - Si X admet une espérance, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ aussi et
       $$E(aX + b) = aE(X) + b$$
     - Si X et Y admettent une espérance, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + bY$ aussi et
       $$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$
     - Si X_1, ..., X_n admettent une espérance alors $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ aussi et
       $$E(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + \cdots + a_nE(X_n)$$
   - **Critère de domination** : si $0 \leq |X| \leq Y$ où Y est une VARD admettant une espérance alors X admet une espérance et
     $$|E(X)| \leq E(|X|) \leq E(Y)$$
   - Si $X \geq 0$ et $E(X)$ existe alors $E(X) \geq 0$.
   - Croissance de l'espérance : si $X \leq Y$, X et Y admettent une espérance alors $E(X) \leq E(Y)$.
   - **Variable bornée : si** X **est bornée** : si $a \leq X \leq b$ alors X admet une espérance et $a \leq E(X) \leq b$.

- **Théorème de transfert** : cas des variables discrètes finies, des variables discrètes infinies.

  Exercice de cours à savoir refaire :
  Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y = \frac{1}{1+X}$. Montrer que Y admet une espérance puis calculer $E(Y)$.

- **Espérance du produit de deux variables indépendantes** : si X et Y admettent une variance et sont indépendantes alors $E(XY) = E(X).E(Y)$.
- Loi conditionnelle.
- **Définition de l'espérance conditionnelle**
- **Formule de l'espérance totale**
- Exercice classique : loi de Poisson suivie d'une loi binômiale
  Peut être posé en colle !! Tout ou une partie seulement...
  Soit λ un réel strictement positif et $p \in]0,1[$.
  Le nombre de véhicule arrivant sur le périphérique en un jour est une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
  On suppose que chaque voiture présente sur le périphérique, a la probabilité p de prendre la sortie "Part-Dieu" et la probabilité $q = 1-p$ de prendre une autre sortie, et ceci indépendamment des autres voitures.
  On note Y et Z les variables aléatoires égales respectivement au nombre de véhicules prenant la sortie "Part-Dieu" et au nombre de véhicules prenant une autre sortie en un jour donné.
  (a) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Y conditionnelle à l'événement $(X = n)$ ainsi que l'espérance conditionnelle $E(Y|(X = n))$.
  ii. Déterminer l'espérance de Y.
  (b) Déterminer la loi de Y , vérifier l'espérance calculée au 1.b
  (c) Quelle est la loi de Z ?
  (d) Y et Z sont-elles indépendantes ?

5. Variance : définition, formule de Huygens, $V(aX + b)$, $V(X + Y)$ dans le cas où X et Y sont indépendantes. Ecart-type.

. (*) : **preuve exigible**